① Классификация ур-ий с ЧП 2-го порядка

Классификация ур-ий для $U(x,y)$. $\exists F$ - ф-ция:

$$F(x, y, U, p_1, p_2, q_1, q_2, q_3)$$

Опр: ур-е в ЧП. 2-го порядка для неизв U:
$F(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}) = 0$ Найти U.

Опр: линейное отн. ст. произв: (1.1)
$$a_{11}(x,y)U_{xx} + 2a_{12}(x,y)U_{xy} + a_{22}(x,y)U_{yy} + F_1(x,y,U,U_x,U_y) = 0$$
Далее лин. ур-е в ч.п. 2-го пор: (1.2)
$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + b_1(x,y)U_x + b_2U_y + C(x,y)U = f(x,y)$$

Если $f \neq 0$, то неоднор, иначе - однор. Св-во ур-я (1.1) зависит от коэф. $\Rightarrow$ объед в 3 класса:

Опр: Ур-е (1.1) в (x_0, y_0) наз:

1) гипербол типа, если: $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}a_{22} > 0$
пример (ур-е колеб): $\begin{cases} U_{tt}(x,t) = a^2U_{xx}(x,t) \\ a_{12} = 0, \; a_{11} = a^2, \; a_{22} = -1 \end{cases}$ (1.3)

2) эллипт. типа, если $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}a_{22} < 0$
пример (ур-е Лапласа): $\begin{cases} U_{xx} + U_{yy} = 0 \\ a_{12} = 0, \; a_{11} = a_{22} = 1 \end{cases}$ (1.4)

3) парабол. типа, если $a_{12}^2(x_0,y_0) - a_{11}a_{22} = 0$
пример (ур-е теплопр): $\begin{cases} U_t = a^2U_{xx} \\ a_{12} = a_{22} = 0 \end{cases}$ (1.5)

② Вывод ур-я теплопровод в пр-ве

- Температура: $u(x,y,z,t) = u(M,t)$
- Коэф теплопровод $k(x,y,z)$
- Коэф теплоемк $c(x,y,z)$
- Плотн распр. массы $\rho(x,y,z)$

(1.6)

$\rceil f(x,y,z)$ такая, что $\exists\, \text{grad} f = \{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\}$

$\rceil \vec{A}$ - векторное поле $\vec{A} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$

$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Опр. форм. Остр.-Гаусса: $\rceil \exists$ обл Ω в пр-ве E^2, огр Σ

$\iint_\Sigma (\vec{A}\vec{n}) d\sigma = \iiint_\Omega \text{div}\vec{A}\, d\tau$ $d\sigma$ - эл-т. поверх, $d\tau$ - эл-т объема

Теор о среднем: если $f \in C[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = f(x^*)(b-a)$, $x^* \in [a,b]$

в пр-ве: $\iiint_\Omega f(M) d\tau = f(M^*) V_\Omega$

Тепловой поток возник, когда тепло перехд из более нагр в более холод места. Закон Фурье представ собой вектор теплов. потока, котор. равен:

$$\vec{W} = -k(x,y,z) \times \text{grad}\, u = \{-k\frac{\partial u}{\partial x}, -k\frac{\partial u}{\partial y}, -k\frac{\partial u}{\partial z}\}$$

$\rceil$ в обл Ω, огр пов Σ $\exists$ т. $M(x,y,z)$. $P(\xi, \eta, \zeta)$

Необх записать закон сохр тепла в обл во вр от t_1 до t_2

Предполаг, что:

- $u(x,y,z,t)$ дважды непр диф по x,y,z и 1 раз непр диф. по t
- $k(x,y,z)$ непр. диф
- c, ρ непрерыв.

② Приращ. кол-ва тепла:

$$\iiint_{\Omega}[c(P)\rho(P)u(P,t_2)-c(P)\rho(P)u(P,t_1)]d\tau=-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{\Sigma}(\vec{W},\vec{n})d\sigma d\tau+\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega}F(P,t)d\tau dt$$

За счет потоков тепла в Ω может попасть доп. тепло — приращ. тепла

$F(x,y,z,t)$ — плотн. распр. источ. тепла.

Примен. ф. Лагранжа, ф. Остр-Гаусса и теор о ср.:

$$\iiint_{\Omega}c(P)\rho(P)\frac{\partial u}{\partial t}(P,t_3)(t_2-t_1)d\tau=-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{W}d\tau dt+\iiint_{\Omega}F(P,t_4)d\tau(t_2-t_1)$$

$t_3,t_4,t_5\in[t_1,t_2]$, $M_1,M_2,M_2\in\Omega$

$$c(M_1)\rho(M_1)\frac{\partial u}{\partial t}(M_1,t_3)(t_2-t_1)V_\Omega=-\int_{t_1}^{t_2}\operatorname{div}\vec{W}\Big|_{M_2}+F(M_3,t_4)V_\Omega(t_2-t_1)$$

$$c(M_1)\rho(M_1)\frac{\partial u}{\partial t}(M_1,t_3)\cancel{(t_2-t_1)V_\Omega}=-\operatorname{div}\vec{W}\Big|_{M_2}^{t=t_5}\cancel{V_\Omega(t_2-t_1)}+F(M_3,t_4)\cancel{V_\Omega(t_2-t_1)}$$

После $\Omega\to M$, $t_1,t_2\to t$ получ ур-е теплопр.: (1.7)

$$c(x,y,z)\rho(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)+F(x,y,z,t)$$

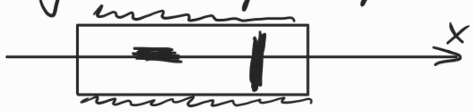
$$\operatorname{div}(k\cdot\operatorname{grad}u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\ldots+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Если c,ρ,k — $const>0$, то ввод $a^2=\frac{k}{c\rho}$. Получ:

$u_t=a^2\Delta u+f(x,y,z,t)$, $f=\frac{F}{c\rho}$

③ Ур-е теплопр. с одной простр. перем. Пост осн. зад.

Предполаг, что все физ хар. пост и U завис только от одной простр. перем.



Из-за изоляц. тепло движ только по Ox. Сеч. маленьк. и темп. во всех т. одинак

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \left(U_t = a^2 \Delta U + f(x,y,z,t) \right)$$

$t=0$ нач. момент времени

Нач. усл: $U(x,0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le l$

Краевые (гранич) условия:

1) $U(0,t) = \mu(t)$, $0 \le t \le T$
2) $\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = \nu(t)$, $0 \le t \le T$ (измен. потока тепла)
3) $U(0,t) + \lambda \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = \theta(t)$ $0 \le t \le T$

Прервая кр. зад:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t) \\ U(0,t) = \mu_1(t) \\ U(l,t) = \mu_2(t) \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \le x \le l \\ 0 \le t \le T \end{matrix}$$

Втор. кр. зад:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t) \\ U_x(0,t) = \nu_1(t) \\ U_x(l,t) = \nu_2(t) \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \le x \le l \\ 0 \le t \le T \end{matrix}$$

Зад. на полупрям:

Первая кр. зад:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t) \\ U(0,t) = \mu(t) \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 < x \\ 0 \le t \le T \end{matrix}$$

Втор кр зад:

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t) \\ U_x(0,t) = \nu(t) \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 < 0 \\ 0 \le t \le T \end{matrix}$$

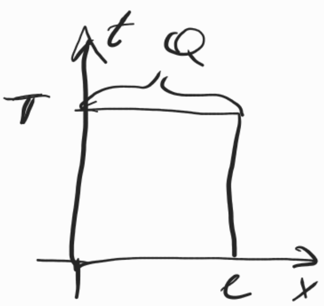
Задача Коши (беск. длин. стерж)

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t) \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ 0 \le t \le T \end{matrix}$$

④ Метод раздел перем. для док-ва сущ. реш 1-й кр. зад для ур-я теплопровод.

Первая кр. задача:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & & (1) \\ u(0,t) = \mu_1(t) & 0 \le x \le l & (2) \\ u(l,t) = \mu_2(t) & 0 \le t \le T & (3) \\ u(x,0) = \varphi(x) & & (4) \end{cases}$$



$Q_{lT} = \{(x,t): 0<x<l,\ 0<t<T\}$, $\overline{Q_{lT}}$: $\Gamma = \dfrac{\overline{Q_{lT}}}{Q_{lT}}$ (3 отрезка)

$u(x,t) \in C[\overline{Q_{lT}}]$, $u \in C^{2,1}[Q_{lT}]$ $(u, u_x, u_t, u_{xx}$ непр$)$

Опр $u(x,t)$ наз реш перв кр. зад теплопровод, если удовл.: 1) $u \in C[\overline{Q_{lT}}]$

2) $u \in C^{2,1}[Q_{lT}]$

3) удовл всем 4-м ур-ям в сист

Если откаж от 1-го усл $\Rightarrow$ $\exists f=0$ $\Rightarrow$ $u_t = a^2 u_{xx}$

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} const & (x,t) \in Q_{lT} \\ \mu_1(t) & x=0 \\ \mu_2(t) & x=l \\ \varphi(x) & t=0 \end{cases}$$

Сущ. реш. Метод разд. перемен. (метод Фурье)

Возьмём: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & 0 \le t \le T \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$

Метод разд. перем: ищем реш. в виде:

$$V(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$T'X = a^2 T X'' \quad | : a^2 T X$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \Rightarrow$$

4) $X'' + \lambda X = 0 \quad 0 < x < l$ $\qquad T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad 0 < t \le T$

$X(0) = 0$ $\qquad T_n(t) = \tilde{\tilde{C}}_n \exp\{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t\}$

$X(l) = 0$

$\lambda_n = (\frac{\pi n}{l})^2, n \in \mathbb{N}$

$X_n(x) = \tilde{C}_n \sin \frac{\pi n}{l} x$

$V_n(x,t) = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x \exp\{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t\}$ $\qquad U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x,t)$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x \exp\{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t\}$

$\int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi m}{l} x \, dx = \begin{cases} l/2, & n = m \\ 0, & n \ne m \end{cases}$

$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x) \quad \Big| \cdot \sin \frac{\pi m}{l} x \Big| \int_0^l$

$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} x \, dx = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi m}{l} x \, dx$

$C_m = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi m}{l} x \, dx \Rightarrow C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s \, ds \Rightarrow$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s \, ds \cdot \exp\{(-\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t\} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (5)$

Теор рядов Фурье:

$f(x) = \sum f_n \sin \frac{\pi n}{l} x \quad 0 \le x \le l, \quad f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin \frac{\pi n}{l} s \, ds$

Если $f(x) \in C[0,l]$, то $\sum f_n^2 < \infty$

Если $f(x) \in C[0,l]$, то $\sum \tilde{f}_n^2 < \infty$, $\tilde{f}_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \cos \frac{\pi n}{l} s \, ds$

Теор (существ)

$\exists \varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l)$, тогда $U(x,t)$, опр (5):

$u \in C[\overline{Q}_{lT}]$

$u \in C^{2,1}[Q_{lT}]$

$U(x,t)$ удовл 1–4

Док-во:

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds = \frac{2}{l}\left(-\frac{l}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n}{l}s\,\varphi(s)\Big|_0^l + \frac{2}{\pi n}\int_0^l \varphi'(s)\cos\frac{\pi n}{l}s\,ds$$

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi'(s)\cos\frac{\pi n}{l}s\,ds$$

$$|\varphi_n| \le \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}|\tilde{\varphi}_n| \le \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\tilde{\varphi}_n^2\right) \qquad \left(ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)\right)$$

ряд $\sum \tilde{\varphi}_n^2 < \infty$ – сх

$$\sum |\varphi_n| \le C\left(\sum\frac{1}{n^2} + \sum\tilde{\varphi}_n^2\right)$$

$$u(x,t) = \sum u_n(x,t)$$

$\forall (x,t) \in \overline{Q}_{lT}$

$|u_n(x,t)| \le |\varphi_n|$ по пр Вейерштр.

$u(x,t) = \sum u_n(x,t)$ сх равн в $\overline{Q}_{lT}$

1) $u \in C[Q_{lT}]$ – доказ

2) $u \in C^{2,1}[Q_{lT}]$. Док-во:

$Q_{lT} = \{(x,t): 0<x<l,\ 0<t\le T\}$

$\overset{\circ}{Q}_{lT} = \{(x,t): 0<x<l,\ 0<t_0\le t\le T\}$

$u \in C^{2,1}[\overset{\circ}{Q}_{lT}]$

$$u_t = \sum \varphi_n\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\right)\exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x$$

докажем равн сх в прямоуг $\overset{\circ}{Q}_{lT}$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t)\right| \le |\varphi_n|\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t_0\right\}\times 1$$ – сх по Даламб

$$\Rightarrow u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right)\exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x$$

3) 1. Проверяем через выч. произв

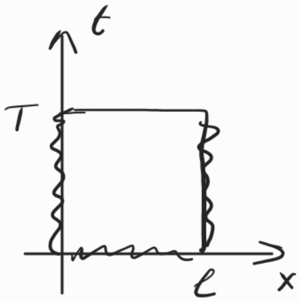
2-3: тк $\sin = 0$ при $x = 0, l$

4: $u(x,0) = \sum \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x)$

Следствия:

$\varphi \in C^1[0,1]$; $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, то u беск диф при $\begin{matrix} 0\le x\le l \\ t\ge 0 \end{matrix}$

⑤ Принцип макс знач. для ур-я теплопровод



$$Q_{lT} = \{(x,t) : 0<x<l,\ 0<t\le T\}$$

$$\Gamma = \frac{\overline{Q_{lT}}}{Q_{lT}}$$

Теор (принц. макс): $\exists\, u(x,t)$:

1) $u(x,t)\in C[\overline{Q_{lT}}]$ 2) $u(x,t)\in C^{2,1}[Q_{lT}]$

3) Удовл ур-ю теплопр. $u_t = a^2 u_{xx}$ $(x,t)\in Q_{lT}$

Тогда:

1) $\max\limits_{\overline{Q_{lT}}} u(x,t) = \max\limits_{\Gamma} u(x,t)$ 2) $\min\limits_{\overline{Q_{lT}}} u(x,t) = \min\limits_{\Gamma} u(x,t)$

Док-во:

От противного: $\exists\, M = \max\limits_{\Gamma} u(x,t)$

и $\exists\, (x_0,t_0)\in Q_{lT}$: $\begin{cases} u(x_0,t_0) = M+\varepsilon \\ \varepsilon>0,\ 0<x_0<l,\ 0<t_0\le T \end{cases}$

$\exists\, V(x,t)$: $u(x,t) = V(x,t) + \frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)$ $V(x,t)\in C[\overline{Q_{lT}}]$

$V(x,t) = u(x,t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)$ $V(x,t)\in C^{2,1}[Q_{lT}]$

$$\max_{\Gamma} V \le \max_{\Gamma} u + \frac{\varepsilon}{2} = M + \frac{\varepsilon}{2}$$

Таким образом:

$V(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) - 0 = M+\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{\overline{Q_{lT}}} V = V(x_1,t_1) \ge M+\varepsilon \\ (x_1,t_1)\in Q_{lT},\ 0<x_1<l,\ 0<t_1\le T \end{cases}$

$$V_{xx}(x_1,t_1)\le 0$$

$$V_t(x_1,t_1) = \begin{cases} 0, & t_1<T \\ \ge 0, & t_1=T \end{cases} \Rightarrow V_t(x_1,t_1)\ge 0$$

$$u_t(x_1,t_1) = V_t(x_1,t_1) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0$$

$$u_{xx}(x_1,t_1) = V_{xx}(x_1,t_1) \le 0$$

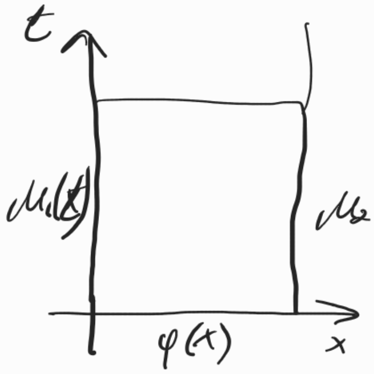
(5) $\Rightarrow \underbrace{u_t(x_1,t_1)}_{>0} = a^2 \underbrace{u_{xx}(x_1,t_1)}_{\le 0}$ — противореч

2 часть: $\forall\ v(x,t) = -u(x,t) \Rightarrow$

$$\min_{\bar{Q}_{cT}} u = \max_{\bar{Q}_{cT}} v$$
$$\| \qquad\qquad \cup$$
$$\min_{\Gamma} u = \max_{\Gamma} v \quad \blacksquare$$

Физ смысл:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l \\ u(0,t) = \mu_1(t) & 0 < t \le T \\ u(l,t) = \mu_2(t) & \\ u(x,0) = \varphi(x) & \end{cases}$$



$$\max_{\bar{Q}_{cT}} u = \max\left\{\max_{[0,T]} \mu_1(t),\ \max_{[0,T]} \mu_2(t),\ \max_{[0,l]} \varphi(x)\right\} = \max_{\Gamma} u$$

Наиб. t° внутри стержня

⑥ Единственность и устойчивость реш 1-й кр. задачи для ур-я теплопровод.

Теор о единств: $\exists\ u_i(x,t)$ $i=1,2$:

1) $u_i(x,t)\in C[\overline{Q_{\ell T}}]$, 2) $u_i(x,t)\in C^{2,1}[Q_{\ell T}]$

3) $\frac{\partial u_i}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$ $0<x<l$ $0<t\leq T$

4) Удовл гран услов: $\begin{cases} u_i(0,t)=\mu_1(t) \\ u_i(l,t)=\mu_2(t) \\ u_i(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$ $0\leq x\leq l$ $0\leq t\leq T$

Тогда: $u_1(x,t)=u_2(x,t)$ $(x,t)\in\overline{Q_{\ell T}}$

Док-во:

$\measuredangle\ u(x,t)=u_1-u_2$ и примен принц. макс знач:

$\left.\begin{array}{l}\max\limits_{\overline{Q_{\ell T}}} u=\max\limits_{\Gamma} u=0 \\ \min\limits_{\overline{Q_{\ell T}}} u=\min\limits_{\Gamma} u=0\end{array}\right\}\Rightarrow u=0$ в $\overline{Q_{\ell T}}$

$\blacksquare$

Лемма: $\exists\ u_i(x,t)$: 1) $\in C[\overline{Q_{\ell T}}]$, 2) $\in C^{2,1}[Q_{\ell T}]$

3) удовл ур-ю теплопр

Тогда если для $(x,t)\in\Gamma$ $u_1\geq u_2$, то и для $(x,t)\in\overline{Q_{\ell T}}$

Док-во:

$\measuredangle\ u(x,t)=u_1-u_2$ и прим принц. макс знач:

$\min\limits_{\overline{Q_{\ell T}}} u=\min\limits_{\Gamma} u\geq 0\Rightarrow$ верно

$\square$

Теор об уст реш $\exists\ u_i(x,t)$ $i=1,2$:

1) $\in C[\overline{Q_{\ell T}}]$, 2) $\in C^{2,1}[Q_{\ell T}]$, 3) уд. ур-ю теплопров

4) уд. гр. и нач усл: $\begin{cases} u_i(0,t)=\mu_{1i}(t) \\ u_i(l,t)=\mu_{2i}(t) \\ u_i(x,0)=\varphi_i(x)\end{cases}$

Тогда:

$$\max_{\overline{Q_{\ell T}}}|u_1-u_2|\leq\underbrace{\max\left\{\max_{[0,T]}|\mu_{11}-\mu_{12}|,\ \max_{[0,T]}|\mu_{21}-\mu_{22}|,\ \max_{[0,l]}|\varphi_1-\varphi_2|\right\}}_{=\varepsilon}$$

⑥ Док-во:

$\exists\, u(x,t) = u_1 - u_2$: $u \in C[\bar{Q}_{lT}]$, $u \in C^{2,1}[Q_{lT}]$

$u_t = a^2 u_{xx}$

$u(0,t) = \mu_{11} - \mu_{12}$ $\quad u(l,t) = \mu_{21} - \mu_{22}$ $\quad u(x,0) = \varphi_1 - \varphi_2$

$\exists\, u^{\pm}(x,t) = \pm\varepsilon$ (соотв) : $u^{\pm} \in C[\bar{Q}_{lT}]$, $u^{\pm} \in C^{2,1}[Q_{lT}]$, $u^{\pm}_t = a^2 u^{\pm}_{xx}$

$u \le \varepsilon = u^+$

$u^- = -\varepsilon \le u$ $\quad (x,t) \in \Gamma \Rightarrow \{$по лемме$\} \Rightarrow$

$u(x,t) \le \varepsilon$ $\quad (x,t) \in Q_{lT}$

$-\varepsilon \le u(x,t)$ $\quad (x,t) \in Q_{lT}$ $\quad \Rightarrow \max\limits_{\bar{Q}_{lT}} |u| \le \varepsilon \Rightarrow$ чтд

$\square$

⑦ Ед реш общ кр зад для ур-я теплопр на отр.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ \alpha_1 u(0,t) - \beta_1 u_x(0,t) = \theta_1(t) \\ \alpha_2 u(l,t) - \beta_2 u_x(l,t) = \theta_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} 0<x<l \\ 0 \le t \le T \end{matrix} \qquad \alpha_i, \beta_i : \begin{cases} const \\ \geq 0 \\ \alpha_i + \beta_i > 0 \end{cases}$$

Теор: $\exists u_i(x,t)$, $i=1,2$: 1) $\in C[\overline{Q}_{lT}]$, 2) $\in C^{2,1}[Q_{lT}]$
3) уд ур-ю тепл. 4) уд. гр и нач усл
Тогда: $u_1 = u_2$ в $\overline{Q}_{lT}$

Док-во:

$\exists u(x,t) = u_1 - u_2$: 1) $\in C[\overline{Q}_{lT}]$, 2) $\in C^{2,1}[Q_{lT}]$, 3), 4)

умножим на $2u$ и проинт:

$$\int_0^l \int_0^t \left[2u(x,\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} u(x,\tau)\, d\tau \right] dx = a^2 \int_0^l \int_0^t 2u(x,\tau)\, u_{xx}(x,\tau)\, dx\, d\tau$$

$$\int_0^l \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (u(x,\tau))^2 \right] d\tau\, dx = 2a^2 \int_0^t \left[u(x,\tau)\, u_x(x,\tau) \Big|_0^l - \int_0^l u_x^2(x,\tau)\, dx \right] d\tau$$

$$\underset{\geq 0}{\int_0^l u^2(x,t)\,dx} - \underset{= 0}{\int_0^l u^2(x,0)\,dx} + \underset{\geq 0}{2a^2 \int_0^t \int_0^l u_x^2(x,\tau)\, dx\, d\tau} \underbrace{- 2a^2 \int_0^t u(x,\tau)\, u_x(x,\tau) \Big|_0^l d\tau}_{(*) \quad ? \ (\geq 0) \text{ - ниже}} = 0$$

$$-2a^2 \int_0^t u(x,\tau)\, u_x(x,\tau) \Big|_0^l d\tau = -2a^2 \int_0^t u(l,\tau)\, u_x(l,\tau)\, d\tau$$

1) $\alpha_2 = 0 \Rightarrow u_x(l,t) = 0 \Rightarrow u(l,t)\, u_x(l,t) = 0$

2) $\alpha_2 > 0 \Rightarrow u(l,t) = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} u_x(l,t) \Rightarrow u \cdot u_x = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} u_x^2 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (*) \geq 0$

1) $\alpha_1 = 0 \Rightarrow u_x(0,t) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u u_x = 0$

2) $\alpha_1 > 0 \Rightarrow u(0,t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} u_x(0,t) \Rightarrow u u_x = \frac{\beta_1}{\alpha_1} u_x^2 \geq 0 \Rightarrow (*) \geq 0$

$\Rightarrow$ тк $\Sigma = 0$, то все 3 инт $= 0$

$\int_0^l u^2(x,t)\,dx = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ в $\overline{Q}_{lT}$

⑧ Сущ. реш. Зад. Коши для ур-я теплопр.

Опр. ЗК: найти $U(x,t)$: $\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} & (1) \\ U(x,0) = \varphi(x) & (2) \end{cases}$ $\begin{matrix} -\infty < x < +\infty \\ t > 0 \end{matrix}$

Опр ф-ция $U(x,t)$ - реш ЗК, если $U \in C(E \cdot \bar{E}^+)$, $U \in C^{2,1}(E \cdot E^+)$ и удовл:

$$U(x,t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s)\,ds &, t>0, \ x \in E \\ 0 &, t=0 \end{cases} \quad (3)$$

$E: -\infty < x < +\infty$, $E^+: t>0$, $\bar{E}^+: t \geq 0$

Теор (о сущ): $\exists\ \varphi \in C(E)$ и $|\varphi(x)| \leq M$ $\forall x \in E$. Тогда $U(x,t)$, определяемая (3) такова, что:
1) $U \in C(E \times \bar{E}^+)$, 2) $U \in C^{2,1}(E \times E^+)$, 3) удовл (1), (2)

Док-во:

$$G(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Rightarrow U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)\varphi(s)\,ds \quad \begin{matrix} t>0 \\ x \in E \end{matrix}$$

$G(x,s,t)$ при фикс s явл реш ур-я теплопровод для $t>0$, $-\infty<x<+\infty$. Проверка:

$$G_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \frac{1}{t^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \cdot \frac{(x-s)^2}{4a^2 t}$$

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \times \left(-\frac{2(x-s)}{4a^2 t}\right)$$

$$G_{xx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \frac{4(x-s)^2}{16a^4 t^2} + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \cdot \left(-\frac{2}{4a^2 t}\right)$$

$G_t = a^2 G_{xx}$

$$|U(x,t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} |\varphi(s)|\,ds \leq M \int_{-\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} ds =$$

$$= \left\{ z = \frac{s-x}{\sqrt{4a^2 t}} \right\} = M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \right\} = M$$

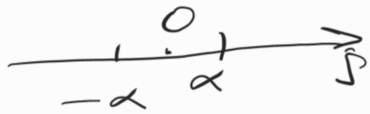
Докаж, что $U \in C^{2,1}(E \times E^+)$. Введем прямоуг $(x,t): |x| \leq \alpha$

Докаж, что инт равн сход в $П \Rightarrow$ получ. оценку G для $П$

⑧

$$G(x,s,t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}, & |s|\le\alpha\\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}\exp\left\{-\frac{(\alpha-s)^2}{4a^2T}\right\}, & s\ge\alpha\\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}\exp\left\{-\frac{(\alpha+s)^2}{4a^2T}\right\}, & s\le-\alpha\end{cases}$$

$= F(s)$



$\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)ds$ сход $\Rightarrow U$ опр и непр в П. $U_t=\int G_t\varphi(s)ds$

$$G_t=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\left(-\frac{1}{2t}\right)+\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\times\frac{(x-s)^2}{4a^2t^2}$$

$$|G_t|\le|G|\left[\frac{1}{2t_0}+\frac{(L+|s|)^2}{4a^2t_0^2}\right]\le F(s)[\ldots]=F_1(s)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(s)ds<\infty$ – сход $\Rightarrow$ производ сущ. и тк $G_t=a^2G_{xx}$ (сущ. $\Uparrow$)

Доказ, что $U_t=a^2U_{xx}$ $\quad U_t-a^2U_{xx}=0$

$\int_{-\infty}^{+\infty}[\underbrace{G_t-a^2G_{xx}}_{=0}]\varphi(s)ds=0$ $\quad$ (Доказали, что U опр и непр в E. Теперь нужна непр в замк. верх полупл

Надо: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ t\to0+}}U=\varphi(x_0)\ \forall x\in E$

$$|U(x,t)-\varphi(x_0)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\varphi(s)ds-\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\varphi(x_0)ds\right|\le$$

из непрерывн $\varphi(x)$ в x_0: $\exists\Delta(\varepsilon):|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall x:|x-x_0|<2\Delta(\varepsilon)$

$\exists\,\delta(\varepsilon)<\Delta(\varepsilon):(x-x_0)^2+t^2<\delta^2(\varepsilon)$

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ldots}}\exp\{\ldots\}|\varphi(s)-\varphi(s_0)|ds\le\int_{-\infty}^{x_0-2\Delta(\varepsilon)}+\int_{x_0-2\Delta(\varepsilon)}^{x_0+2\Delta(\varepsilon)}+\int_{x_0+2\Delta(\varepsilon)}^{+\infty}\le$$

$$\le2M\int_{-\infty}^{x_0-2\Delta\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\ldots}}\exp\{\ldots\}ds+\frac{\varepsilon}{2}+\overline{\int_{x_0+2\Delta\varepsilon}^{+\infty}\ldots}$$ мб сюда $2M$

$$z=\frac{s-x}{\sqrt{4a^2t}}$$

$$I_1=2M\int_{-\infty}^{\frac{x_0-2\Delta(\varepsilon)-x}{\sqrt{4a^2t}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz\le2M\int_{-\infty}^{\frac{-\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2t}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz<\frac{\varepsilon}{4}$$

Аналог для I_3

$\Rightarrow|U(x,t)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$ $\quad\square$

⑨ Единств реш ЗК для ур-я теплопровод

Теор: $\exists\, u_i(x,t)$ $i=1,2$: 1) $\in C(E\times\bar{E}^+)$ 2) $\in C^{2,1}(E\times E^+)$

3) удовл: $\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t)=a^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$

4) удовл нач усл и огр конст: $\begin{cases} u_i(x,0)=\varphi(x) \\ |u_i(x,t)|\le M \end{cases}$

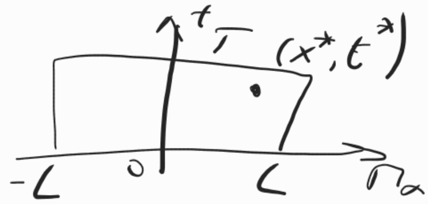
Тогда: $u_1=u_2$, $x\in E$, $t\in\bar{E}^+$

Док-во:

$\exists\, u(x,t)=u_1-u_2$. $u\in C(E\times\bar{E}^+)$, $u\in C^{2,1}(E\times E^+)$

$u_t=a^2u_{xx}$, $u(x,0)=0$, $|u(x,t)|\le 2M$, $x\in E$, $t\in E^+$

$\exists\, \exists (x^*,t^*)$: $u(x^*,t^*)=\varepsilon>0$, $t^*>0$



$\exists\, w(x,t)=\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}+a^2t\right)$, $w\in C[\Pi_L]$, $w\in C^{2,1}[\Pi_L]$

$w_t=a\,w_{xx}$ в Π_L

$w(x,0)=\frac{4M}{L^2}\frac{x}{2}\ge 0$ $\quad w(\pm L,t)\ge 2M$

$u(x,0)=0$ $|u(\pm L,t)|\le 2M$ $\Rightarrow$ {прим принц макс знач} $\Rightarrow$

$\Rightarrow |u(x,t)|\le w(x,t)$ $(x,t)\in\Pi_L$ (но на самом деле лемму)

$|\varepsilon=|u(x^*,t^*)|\le w(x^*,t^*)=\frac{4M}{L^2}\left(\frac{(x^*)^2}{2}a^2t^*\right)\to 0$ $L\to 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists$ точки, где разность двух реш $\ne 0$ $\Rightarrow u(x,t)=0$

⑩ Метод продолжения. Теор сущ реш 1-й кр зад для ур-я теплопр. на полупрямой

Опр: 1-я кр задача на полупр: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \ (1), & x>0,\ t>0 \\ u(0,t)=0 \ (2), & t\geq 0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \ (3), & x\geq 0 \end{cases}$

Опр: ЗК: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ -\infty<x<+\infty \end{cases}$ Реш: $u=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\varphi(s)ds$

$G(x,s,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\exp\{-\frac{(x-s)}{4a^2t}\}$

Опр: ф-ция явл реш 1-й кр. зад, если $\in C[\bar{E}\times\bar{E}^+]$, $\in C^{2,1}[E\times E^+]$ и удовл (1)-(3)

Теор (о сущ. и ед): $\exists\varphi(x)$: $\varphi(x)\in C[\bar{E}^+]$, $\varphi(0)=0$, $|\varphi(x)|\leq M$ на $x\in\bar{E}^+$ $\Rightarrow\exists!\, u(x,t)$: 1) $u\in C(\bar{E}^+\times\bar{E}^+)$ 2) $u\in C^{2,1}(E^+\times E^+)$ 3) $|u|\leq M$ $\forall(x,t)\in(\bar{E}^+\times\bar{E}^+)$ 4) удовл (1)-(3)

Док-во:

$\nexists$ $\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0\\ -\varphi(-x), & x\leq 0\end{cases}$ $\Phi(x)\in C(E)$, $|\Phi|\leq M$ $\Rightarrow\nexists u$ - реш ЗК

$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}\\ u(x,0)=\Phi(x)\end{cases}$ $\exists!\, u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\}\Phi(s)\,ds$ - реш

опр и непр в замкн верх полупл, удовл ур-ю теплопр и нач усл

$\exists\, v(x,t)=u(x,t)$, $x\geq 0$, $t\geq 0$:

- $v\in C(\bar{E}^+\times\bar{E}^+)$ — очев
- $v\in C^{2,1}(E^+\times E^+)$
- $|v|\leq M$, $(x,t)\in(\bar{E}^+\times\bar{E}^+)$ тк $|\Phi(x)|\leq M\Rightarrow|u|\leq M\Rightarrow|v|\leq M$
- ур-е тепл вып очев
- нач усл: $v(x,0)=u(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x)$
- кр усл: $v(0,t)=u(0,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\underbrace{\exp\{-\frac{s^2}{4a^2t}\}}_{\text{чет по } s}\underbrace{\Phi(s)}_{\text{нечет}}ds=0$

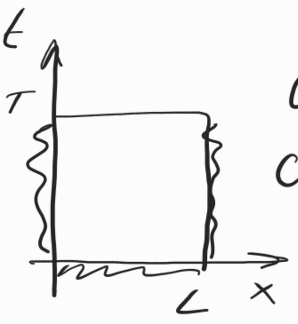
$\Rightarrow$ существ. доказ

единств.: $\exists u_i(x,t)$ $i=1,2$: $u_i\in C(\bar{E}^+\times\bar{E}^+)$, $\in C^{2,1}(E^+\times E^+)$ $|u_i(x,t)|\leq M$, $(x,t)\in(\bar{E}^+\times E^+)$ и $u_i(x,t)$ удовл (1)-(3)

(10) $\exists\; u = u_1 - u_2,\ \in C(\bar E^+ \times \bar E^+),\ \in C^{2,1}(E^+ \times E^+),\ |u| \le 2M$ на $\bar E^+ \times \bar E^+$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \qquad \exists\; \exists (x^*, t^*) \in (E^+ \times E^+) : u(x^*, t^*) = \varepsilon > 0$$

$$\Delta\; w(x,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right),\quad w \in C(\bar E^+ \times \bar E^+),\ \in C^{2,1}(E^+ \times E^+) \begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w(0,t) \ge 0 \\ w(x,0) \ge 0 \end{cases}$$



слева и снизу $w \ge u$

справа: u удовл всему, w — и — кроме нач и краев усл.

$|u(L,t)| \le 2M$

$w(L,t) \ge 2M$ $\Rightarrow |u(L,t)| \le w(L,t)$

по лемме о принц. макс знач:

$u(x,t) \le w(x,t)$ в Π_L

$\varepsilon = u(x^*, t^*) \le w(x^*, t^*) = \dfrac{4M}{L^2}\left(\dfrac{(x^*)^2}{2} + a^2 t^*\right) \to 0,\ L \to \infty \Rightarrow$

противоречие доказано $\square$

(11) Интегральн. представ 1-й кр зад для ур-я теплопр.

Опр: 1-я кр задача:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$$

Решение (исп метод разд. перем):

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l} s\, ds \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right\} \sin\frac{\pi n}{l} x$$

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,s,t)\varphi(s)\,ds \qquad G(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot \sin\frac{\pi n}{l} s\, \exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right\}$$

Сравн 1-й кр и ЗК

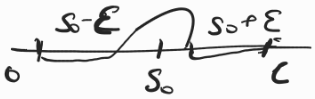
1) $G(x,s,t) = G(s,x,t)$
2) $G_t = a^2 G_{xx}$, $t>0$
3) $G(x,s,t) \ge 0$, $x,s\in[0,l]$, $t>0$

Док-во:

$\forall\, \varphi_\varepsilon(x)$: $\int_0^l \varphi_\varepsilon(s)\,ds = 1$, $\varepsilon\to 0$

$\varphi_\varepsilon(x)\in C^1[0,l]$

$\varphi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon(l) = 0$



1) $G(x,s,t) = G(s,x,t)$
2) $G_t = a^2 G_{xx}$, $t>0$
3) $G(x,s,t) \ge 0$, $(x,s)\in E^2$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ldots}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}\right\}\varphi\, ds$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\}$$

теор о средн.

$$u_\varepsilon(x,t) = \int_0^l G(x,s,t)\varphi_\varepsilon(s)\,ds = \int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} G(x,s,t)\varphi_\varepsilon(s)\,ds = G(x,s^*,t)\int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(s)\,ds$$

$s^*\in(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t) = G(x,s_0,t)$. По принц. макс знач:

$\min\limits_{\bar Q_{lT}} u_\varepsilon = \min\limits_{\Gamma} u_\varepsilon$, но на гран 0 или $\varphi(x)\ge 0 \Rightarrow u_\varepsilon \ge 0$

(12) Ур-я Лапл. и Пуассона. Пост. осн. задач. Фундам. реш. ур-я Лапласса

Процесс распр. тепла в пр-ве опис ф-цией $U(x,y,z;t)$

$$U_t = a^2 \Delta u + F(x,y,z)$$

ф-ция, опр плотн распред источн. тепла

имеет стацион реш. $u(x,y,z) \Rightarrow$ стацион ур-е теплопр.

$$a^2 \Delta U = -F(x,y,z)$$

Ур-е Пуассона: $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = -\dfrac{F(x,y,z)}{a^2}$ $\quad \Delta U = -4\pi\rho(x,y,z)$

Ур-е Лапласса $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$ $\quad \Delta U = 0$

В плоскости: $U_{xx} + U_{yy} = f(x,y)$ — Пуассон

$U_{xx} + U_{yy} = 0$ — Лаплас

Фунд. реш ур-я Лапл. в E^3:

$M(x,y,z)$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$, расст $R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + \ldots + (z-z_0)^2}$

Фунд реш — $\dfrac{1}{R_{MM_0}}$. Доказ, что $\Delta\left(\dfrac{1}{R_{MM_0}}\right) = 0 \quad \forall M \neq M_0$

Док-во:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{2(x-x_0)}{R^3_{MM_0}} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2(x-x_0)^2}{R^5_{MM_0}} - \frac{1}{R^3_{MM_0}}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) = 3\cdot\frac{(x-x_0)^2 + \ldots + (z-z_0)^2}{R^5_{MM_0}} - \frac{3}{R^3_{MM_0}} = 0$$

■

— " — в E^2

$M(x,y)$, $M_0(x_0,y_0)$, $\rho_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

Фунд реш — $\ln\dfrac{1}{\rho_{MM_0}}$ Доказ, что $\Delta \ln\left(\dfrac{1}{\rho_{MM_0}}\right) = 0 \quad \forall M \neq M_0$

Док-во:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln \rho_{MM_0}\right) = -\frac{1}{\rho_{MM_0}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-x_0)}{\rho_{MM_0}} = -\frac{(x-x_0)}{\rho_{MM_0}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right) = 2\cdot\frac{1}{\rho^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot 2(x-x_0)^2 - \frac{1}{\rho^2} = \frac{2(x-x_0)^2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2}$$

$$\Delta\left(\ln\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right) + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right) = \frac{2\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} = 0$$

■

Постан. осн задач:

E^3: обл Ω огр Σ $\qquad$ Ω Σ

E^2: обл D огр L $\qquad$ D L

(12)

Внутр зад. Дирихле для ур-я Лапл.:

в E^3

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & (x,y,z) \in \Omega \\ U(x,y,z) = \varphi(x,y,z) & (x,y,z) \in \Sigma \\ U(x,y,z) = ? \end{cases}$$

в E^2

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{в } D \\ U(x,y) = \varphi(x,y) & \text{на } L \\ U(x,y) = ? \end{cases}$$

Внеш — " — :

в E^3

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & (x,y,z) \in E^3 \setminus \overline{\Omega} \\ U(x,y,z) = \varphi(x,y,z) & (x,y,z) \in \Sigma \\ U(x,y,z) = ? \end{cases}$$

в E^2

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{в } E^2 \setminus \overline{D} \\ U(x,y) = \varphi(x,y) & \text{на } L \\ U(x,y) = ? \end{cases}$$

Для Пуассона аналог, напр., внутр задач в E^3

$$\begin{cases} \Delta U = f(x,y,z) & (x,y,z) \in \Omega \\ U(x,y,z) = \varphi(x,y,z) & (x,y,z) \in \Sigma \end{cases}$$

Внутр зад Неймана для ур-я Лапласа:

в E^3

$$\Delta U = 0 \quad \text{в } \Omega$$
$$\frac{\partial U}{\partial n}(x,y,z) = \psi(x,y,z) \quad \text{на } \Sigma$$

в E^2

$$\Delta U = 0 \quad \text{в } D$$
$$\frac{\partial U}{\partial n}(x,y) = \psi(x,y) \quad \text{на } L$$

Внеш зад Неймана для ур-я Лапласа.

в E^3

$$\Delta U = 0 \quad \text{в } E^3 \setminus \overline{\Omega}$$
$$\frac{\partial U}{\partial n}(x,y,z) = \psi(x,y,z) \quad \text{на } \Sigma$$

в E^2

$$\Delta U = 0 \quad \text{в } E^2 \setminus \overline{D}$$
$$\frac{\partial U}{\partial n}(x,y) = \psi(x,y) \quad \text{на } L$$

нормальная производная

(13) 1-я и 2-я формулы Грина. 3-я (основн) форм Грина

Теор Остр-Гаусса: 

$\bar A(x,y,z)=\{P(\dots),Q(\dots),R(\dots)\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_\Sigma (\bar A,\bar n)\,d\sigma=\iiint_\Omega \operatorname{div}\bar A\,d\tau,\quad \operatorname{div}\bar A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$\exists u,v:\ \in C^2(\Omega),\ \in C^1(\bar\Omega)$

$$\bar A(x,y,z)=u(x,y,z)\,\mathrm{grad}\,v(x,y,z)=\left\{u\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial z}\right\}$$

$$\iint_\Sigma u(\mathrm{grad}\,v,\bar n)\,d\sigma=\iiint_\Omega \operatorname{div}(u\cdot\mathrm{grad}\,v)\,d\tau$$

$$\operatorname{div} u\,\mathrm{grad}\,v=uv_{xx}+uv_{yy}+uv_{zz}+u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z=u\Delta v+(\mathrm{grad}\,u,\mathrm{grad}\,v)$$

в итоге:

$$\iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma=\iiint_\Omega u\Delta v\,d\tau+\iiint_\Omega(\mathrm{grad}\,u,\mathrm{grad}\,v)\,d\tau$$

1-я ф Грина: $\iiint_\Omega u\Delta v\,d\tau=\iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma-\iiint_\Omega(\mathrm{grad}\,u,\mathrm{grad}\,v)\,d\tau$

$\bar A=v\,\mathrm{grad}\,u$, $\iiint_\Omega v\Delta u\,d\tau=\iint_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma-\iiint_\Omega(\mathrm{grad}\,v,\mathrm{grad}\,u)\,d\tau$

вычитаем и получаем:

2-я ф. Грина: $\iiint_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\,d\tau=\iint_\Sigma\left[u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma$

3-я ф Грина: $4\pi u(M_0)=-\iiint_\Omega\frac{1}{R_{MM_0}}\Delta u\,d\tau-\iint_\Sigma\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right)-\frac{1}{R_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma$

Вывод: $u\in C^2(\Omega),\in C^1(\bar\Omega)$

$\{M_0(x_0,y_0,z_0),\ P(\xi,\eta,\zeta)\}$

$\measuredangle\ \frac{1}{R_{MM_0}}$ $(x-x_0)^2+\dots+(z-z_0)^2=\varepsilon^2$ $\Sigma^\varepsilon_{M_0}\in\Omega$ Подст во 2-ю ф Г. $v\to\frac{1}{R}$

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon}\left(u\Delta\left(\frac1R\right)-\frac1R\Delta u\right)d\tau=\iint_\Sigma\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac1R\right)-\frac1R\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma+\iint_{\Sigma^\varepsilon_{M_0}}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac1R\right)-\frac1R\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{\Sigma^\varepsilon_{M_0}}\overset{=1/\varepsilon}{\frac{1}{R_{MM_0}}}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0\qquad \bar n=\left\{-\frac{(x-x_0)}{R},\dots,-\frac{(z-z_0)}{R}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac1R\right)=-\frac12\cdot\frac{2(x-x_0)}{R^3}=-\frac{(x-x_0)}{R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac1R\right)=\left(\mathrm{grad}\frac1R,\bar n\right)=\frac{(x-x_0)^2+\dots+(z-z_0)^2}{R^4}=\frac{1}{R^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}$$

(13) $\iint_{\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}} u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}} u\, d\sigma \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u(M_0) 4\pi$

(тк u непр, а инт = площ. поверх сферы)

Отсюда: $4\pi u(M_0) = -\iiint_{\Omega} \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u\, d\tau - \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MM_0}}\right) - \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma$

2-я ф Грина в E^2: $\iint_D (u\Delta v - v\Delta u) ds = \int_L \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] dl$

3-я ф Грина в E^2: $2\pi u(M_0) = -\iint_D \ln\frac{1}{\rho} \Delta u\, d\tau -$

$- \int_L \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right) - \ln\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dl$

(14) Св-ва гармонич. ф-ций

Опр: ф-ция $u(x_1,...,x_n)$ наз гармонич в Ω_n, если $u \in C^2(\Omega_n)$ и удовл ур-ю Лапл в Ω_n:

$$\Delta u = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

Связь между гармон функ. 2-х перемен и аналит. функ

$z = x + iy$ $\quad f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, если $f(z)$ - аналит, то вып усл Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ продиф $u_{xx} = v_{yx}$, $v_{xy} = -u_{yy} \Rightarrow u_{xx} = -u_{yy} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$\Leftrightarrow \Delta u = 0$. Аналог. для $\Delta v = 0$

Св-ва гарм. функ в E^3:

ф. Грина: $4\pi u(M_0) = -\iint_\Sigma \left(u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right) - \left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma_P - \iiint_\Omega \frac{\Delta u}{R_{M_0M}} d\tau_M$

Пусть $u(x,y,z) \in C^2(\Omega)$ - гармон. тогда ф. Грина: (т.к $\Delta u = 0$)

$$4\pi u(M_0) = -\iint_\Sigma \left(u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right) - \left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma_P$$

Теор 1: Пусть $u(x,y,z)$ - гармон в Ω, а Σ_{in} - замк пов: $\Sigma_{in} \in \Omega$. Тогда:

$$\iint_{\Sigma_{in}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

Док-во: Запиш. 2-ю ф. Грина для Ω_{in}, огр Σ_{in}:

$\iiint_{\Omega_{in}} (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma_{in}} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$. Пусть $v(...) = 1$ и $\Delta u = 0$:

$$\iint_{\Sigma_{in}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

$\blacksquare$

Теор. 2 Если $u(...)$ - гарм. в Ω, то она беск. диф.

Док-во: $u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_{in}} \left(u(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) - \left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \frac{\partial u}{\partial n_P}(P)\right) d\sigma_P$

Пусть $P(\xi, \eta, \zeta)$:

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_{in}} \left(u(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + ... + (z-\zeta)^2}}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + ... + (z-\zeta)^2}}\right) \frac{\partial u}{\partial n_P}(P)\right) d\sigma_P$$

- можно диф сколько угодно $\blacksquare$

Теор 3 (о сред знач): Если u - гармон в Ω, то $\forall M_0 \in \Omega$:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma^a_{M_0}} u(P) d\sigma_P, \quad \Sigma^a_{M_0} \in \Omega$$

(14) **Док-во:** 3-я ф. Грина для $\Sigma_{M_0}^a$

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma_{M_0}^a}\left(u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) - \left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\frac{\partial u}{\partial n}(P)\right)d\sigma_P$$

$R_{M_0P} = a$, то

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)d\sigma_P + \overline{\frac{1}{4\pi}\frac{1}{a}\iint_{\Sigma_{M_0}^a}\frac{\partial u}{\partial n}(P)d\sigma_P}^{=0} \quad (*)$$

$\overline{n} = \left(\frac{x-x_0}{R_{M_0P}}, \dots, \frac{z-z_0}{R_{M_0P}}\right)$, $\operatorname{grad}\frac{1}{R_{M_0P}} = \left(-\frac{x-x_0}{R^3}, \dots, -\frac{z-z_0}{R^3}\right)$ Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) = \left(n, \operatorname{grad}\frac{1}{R}\right) = -\frac{(x-x_0)^2+\dots}{R^4} = -\frac{1}{R^2_{M_0,P}} = -\frac{1}{a^2}$$

Подстав в $(*)$ и получ $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(P)d\sigma_P$ ∎

Теор 3 (двумер случ): Если u - гарм в D, то $\forall M \in D$:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi a}\int_{L_M^a} u(P)dl_P \quad L_M^a \text{ - окр с } R=a \text{ и центр в } M$$

Док-во: 3-я ф. Грина:

$$u(M) = -\frac{1}{2\pi}\int\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right) - \overline{\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}}^{=0}\right)dl_P$$

$\overline{n} = \left(-\frac{x-\xi}{\rho}, -\frac{y-\eta}{\rho}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\ln\rho = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\rho}2(x-\xi) = \frac{x-\xi}{\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right) = \left\{\frac{x-\xi}{\rho^2}, \frac{y-\eta}{\rho^2}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right) = \left(\overline{n}, \operatorname{grad}\ln\frac{1}{\rho}\right) =$$

$$= -\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{\rho^3} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{a} \Rightarrow u(M) = \frac{1}{2\pi a}\int_{L_M^a} u(P)dl_P$$ ∎

Теор: Если $u \in C(\overline{\Omega})$, то $\max\limits_{\Omega} u(M) = \max u(\Sigma)$ (и min)

Док-во: $\exists M_0 \in \Omega$, $u(M_0) = \max\limits_{\Omega} u(M)$ } окруж $\Sigma_{M_0}^a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ {теор о ср из (14)}: $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_{M_0}^a} u(P)d\sigma_P \le$

$\le \frac{1}{4\pi a^2}u(M_0)\iint d\sigma_P = u(M_0)$

$\Rightarrow$ из непр u: $u(P) = u(M_0) = \max\limits_{\Omega} u \quad \forall P \in \Sigma_{M_0}^a$

возьмем на $\Sigma_{M_0}^a$ M_1 наиб. близ к Σ. Тк $u(M_1) = u(M_0)$, то

$\exists$ сфера $\Sigma_{M_1}^{a_1} \in \Omega \Rightarrow u(P) = u(M_1) = u(M_0) = \max\limits_{\Omega} u$

Выберем на $\Sigma_{M_1}^a$ M_2 и повторим. Получ $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$u(M_n) = u(M_0) = \max\limits_{\Omega} u$ и $M_n \to M^* \in \Sigma \Rightarrow u(M^*) = u(M_n) = u(M_0)$

Для min надо взять $v = -u$ и примен утв про max ∎

15) Принцип макс знач для гармон ф-ций

Опр: ф-ция $u(x_1, ..., x_n)$ наз гармонич в Ω_n, если $u \in C^2(\Omega_n)$ и удовл ур-ю Лапл в Ω_n:

$$\Delta u = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

Теор: Если $u \in C(\bar{\Omega})$, то $\max\limits_{\bar{\Omega}} u(M) = \max u(\Sigma)$ (и min)

Док-во: $\exists M_0 \in \Omega$, $u(M_0) = \max\limits_{\Omega} u(M)$, Σ окруж $\Sigma^a_{M_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ {теор о ср из (14)}: $u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma^a_{M_0}} u(P) d\sigma_P \leq$

$\leq \frac{1}{4\pi a^2} u(M_0) \iint d\sigma_P = u(M_0)$

$\Rightarrow$ из непр u: $u(P) = u(M_0) = \max\limits_{\Omega} u \quad \forall P \in \Sigma^a_{M_0}$

возьмем на $\Sigma^a_{M_0}$ M_1 наиб. близ к Σ. Тк $u(M_1) = u(M_0)$, то

$\exists$ сфера $\Sigma^{a_1}_{M_1} \in \Omega \Rightarrow u(P) = u(M_1) = u(M_0) = \max\limits_{\Omega} u$

Выберем на $\Sigma^a_{M_1}$ M_2 и повторим. Получ $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$u(M_n) = u(M_0) = \max\limits_{\Omega} u$ и $M_n \to M^* \in \Sigma \Rightarrow u(M^*) = u(M_n) = u(M_0)$

Для min надо взять $v = -u$ и примен утв про max ⊠

16 Един и уст реш внутр зад Дирихле для ур-е Лапл.

Опр: $U(x,y,z)$ – реш внутр з. Дир. , $u \in C(\bar\Omega)$ и $\in C^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & (x,y,z) \in \Omega \\ U(\ldots) = \varphi(\ldots) & (\ldots) \in \Sigma \end{cases} \qquad \vec{u} = \begin{cases} \text{const} & \Omega \\ \varphi(\ldots) & \Sigma \end{cases}$$

Теор (о единств) $\exists U_i(\ldots)$ $i=1,2$: $\in C(\bar\Omega), \in C^2(\Omega)$, уд ур-ю Лапл.
$\Rightarrow U_1 = U_2$

Док-во: $\exists U(\ldots) = U_1 - U_2$, $U \in C(\bar\Omega), \in C^2(\Omega)$ и уд ур-ю Лапл.
U – непр в $\bar\Omega$ и гарм в Ω, то принц. макс знач:
$\max\limits_{\bar\Omega} u = \max\limits_{\Sigma} u = 0$, $\min\limits_{\bar\Omega} u = \min\limits_{\Sigma} u = 0$ $\Rightarrow U = 0$ ☒

Опр (E^2): $U(\ldots)$ – реш. внут з Дирихле: $\in C(\bar\Omega), \in C^2(\Omega)$, и уд ур-ю Лапл

Теор (о ед) аналогично

Устойч в E^3:

Лемма: $\exists U_i(\ldots)$ $i=1,2$: $\in C(\bar\Omega), \in C^2(\Omega)$, уд ур. Лапл и $U_1 \geq U_2$ на Σ
Тогда $U_1 \geq U_2$ в $\bar\Omega$

Док-во: $\triangleleft U(\ldots) = U_1 - U_2$, $U(\ldots) \in C(\bar\Omega), \in C^2(\Omega)$, уд ур Лапл и $U \geq 0$ в Σ
Тк непр в $\bar\Omega$ и гарм в Ω, то по пр. макс знач:
$\min\limits_{\bar\Omega} u = \min\limits_{\Sigma} u \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$ в $\bar\Omega \Rightarrow U_1 \geq U_2$ в $\bar\Omega$ ☒

Теор (об уст): $\exists U_i(\ldots)$ $i=1,2$: $U(\ldots) \in C(\bar\Omega), \in C^2(\Omega)$, уд ур Лапл
Тогда $\max\limits_{\bar\Omega} |U_1 - U_2| \leq \max\limits_{\Sigma} |\varphi_1 - \varphi_2|$

Док-во: $\exists U(\ldots) = U_1 - U_2$, $U \in C(\bar\Omega)$, $\in C^2(\Omega)$, уд ур Лапл $u = \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ на Σ
$\exists \Phi_0 = \max\limits_{\Sigma} |\varphi_1 - \varphi_2|$ и $U^+(\ldots) = \Phi_0$, $U^-(\ldots) = -\Phi_0$
$U^\pm \in C(\bar\Omega), \in C^2(\Omega)$, уд ур Лап. и $U^- = -\Phi_0 \leq \varphi_1 - \varphi_2 \leq \Phi_0 = U^+$ на Σ
По лемме для u, u^-: $-\Phi_0 = U^- \leq u$ в $\bar\Omega$
для u, u^+: $u \leq U^+ \leq \Phi_0$ в $\bar\Omega$ $\Rightarrow |u| \leq \Phi = \max\limits_{\Sigma} |\varphi_1 - \varphi_2|$ в $\bar\Omega$
$\Rightarrow \max\limits_{\bar\Omega} |U_1 - U_2| \leq \max\limits_{\Sigma} |\varphi_1 - \varphi_2|$ ☒

(17) Ед. реш внутр з. Неймана для ур. Лапл и необх усл разреш

Опр: $u(\ldots)$ — реш, если $u \in C^1(\bar\Omega)$, $\in C^2(\Omega)$ и $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\ldots) = \psi(\ldots) & \text{на } \Sigma \end{cases}$

Теор (о един): $\exists\, u_i(\ldots)$ $i=1,2$: $\in C^1(\bar\Omega)$, $\in C^2(\Omega)$, уд ур Лапл и $\frac{\partial u_i}{\partial n}(\ldots) = \psi_i(\ldots)$ на Σ

Тогда $u_1 - u_2 = const$ в Ω (с точн до конст)

Док-во: $\exists\, u = u_1 - u_2$, $\in C^1(\bar\Omega)$, $\in C^2(\Omega)$, уд ур Лапл и $\frac{\partial u}{\partial n}(\ldots) = 0$ на Σ

1-я ф. Грина ($u, v \in C^1(\bar\Omega), \in C^2(\Omega)$):

$$\iiint_\Omega u \Delta v \, d\tau = \iint_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_\Omega (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) \, d\tau$$

запишем для u и $v = u$

$$\iiint_\Omega u \underbrace{\Delta u}_{=0} \, d\tau = \iint_\Sigma u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=0} d\sigma - \iiint_\Omega (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) \, d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iiint_\Omega (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) \, d\tau = \iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \ldots = 0$$

$\Rightarrow u = u_1 - u_2 = const$ в $\bar\Omega$ $\square$

Теор (необх усл разрешим): если $\exists\, u(\ldots)$: $u \in C(\bar\Omega)$, $\in C^2(\Omega)$, и удовл ур Лапл и $\frac{\partial u}{\partial n}(\ldots) = \psi(\ldots)$ то $\iint_\Sigma \psi(P) \, d\sigma_P = 0$

Док-во: из усл $\Rightarrow u$ — гармонич в Ω. По 1-му св-ву гармон ф-ций (14): $\iint_{\Sigma_{in}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) \, d\sigma_P = 0$, где Σ_{in} — $\forall$, $\in \Omega$

$\exists\, \{\Sigma_{in}^n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Sigma$ (изнутри). Тогда

$$0 = \iint_{\Sigma_{in}^n} \frac{\partial u}{\partial n}(P) \, d\sigma_P \longrightarrow \iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}(P) \, d\sigma_P \quad n \to \infty$$

$$\Rightarrow \iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}(P) \, d\sigma_P = \iint_\Sigma \psi(P) \, d\sigma_P = 0 \quad \blacksquare$$

(18) Ед реш внеш. з Дирихле для ур Лапл в 2и 3 мер.

Опр: $u(\ldots)$ – реш $u \in C(E^3 \setminus \Omega), \in C^2(E^3 \setminus \overline{\Omega})$, $\begin{cases} \Delta u = 0 & (\ldots) \in E^3 \setminus \overline{\Omega} \\ u(\ldots) = \varphi(\ldots) & \Sigma \end{cases}$

и $u \rightrightarrows 0$ при $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty$

Теор (о един в E^3): $\exists u_i(\ldots)\ i=1,2: \in C(E^3 \setminus \Omega), \in C^2(E^3 \setminus \overline{\Omega})$, уд ур Лапл

и $u \rightrightarrows 0$ при $\sqrt{\ldots} \to \infty$

Тогда $u_1 = u_2$ в $E^3 \setminus \Omega$

Док-во: $\exists u(\ldots) = u_1 - u_2$, $\in C(E^3 \setminus \Omega), \in C(E^3 \setminus \overline{\Omega})$, уд ур Лапл

и $u \rightrightarrows 0$ при $\sqrt{\ldots} \to \infty$

$\exists \exists M^*(x^*, y^*, z^*)$: $u(M^*) = \varepsilon > 0$. $\measuredangle$ сферу $\Sigma_A: x^2+y^2+z^2 = A^2$, содерж внутри Ω и M^*. $\measuredangle$ Ω_A огр Σ изн и Σ_A снар.

$u \in C(\overline{\Omega_A}), \in C^2(\Omega_A)$ и уд ур Лапл $\Rightarrow$ справед принц. макс и $\max\limits_{\overline{\Omega_A}} u(\ldots) = \max\{\max\limits_{\Sigma} u, \max\limits_{\Sigma_A} u\}$. Тк $M^* \in \overline{\Omega_A}$, то

$\varepsilon = u(M^*) \le \max\limits_{\overline{\Omega_A}} u = \max\{\ldots\}$

Тк $u \rightrightarrows 0$, то $\exists A: u(\ldots) \le \varepsilon/2 \quad \forall (\ldots) \in \Sigma_A$. Тк $u(\ldots) = 0$ на Σ

то $\varepsilon = u(M^*) \le \max\{\ldots\} \le \varepsilon/2$ – противор $\Rightarrow u = 0$ ∎

Пример не ед. без усл на беск:

$\Omega\ x^2+y^2+z^2 < 1$; $\Sigma: x^2+y^2+z^2 = 1$ $\quad \Delta u = 0$ в $E^3 \setminus \Omega$

$u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{\ldots}}$ $\quad u(\ldots) = 1$ в Σ

Опр u – реш, $\in C(E^2 \setminus D), \in C^2(E^2 \setminus \overline{D})$, уд ур Лапл, $|u| \le M$

Теор (о ед в E^2): $\exists u_i(\ldots)\ i=1,2: \in C(E^2 \setminus D), \in C^2(E^2 \setminus \overline{D})$

уд ур. Лапл: $\Delta u_i = 0$ в $E^2 \setminus \overline{D}$, $u_i = \varphi$ на L и $|u_i| \le M_i = const$ в $E^2 \setminus D$

Тогда $u_1 = u_2$ в $E^2 \setminus D$

Док-во: $\measuredangle$ $u = u_1 - u_2$, $\in C(E^2 \setminus D), \in C^2(E^2 \setminus \overline{D})$, уд ур Лапл и

$|u| \le M = M_1 + M_2$ в $E^2 \setminus D$

$\exists \exists (x^*, y^*) \in E^2 \setminus \overline{D}: u(x^*, y^*) = \varepsilon > 0$. $\exists L_a: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$, $(x_0, y_0) \in D$: $L_a \in D$. $\exists L_A = (x-x_0)^2 + \ldots = A^2$: $\overline{D} \in L_A$, $(x^*, y^*) \in L_A$

$\measuredangle$ $w(x,y) = M \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{a}\right)}{\ln(A/a)}$ – гармон в $E^2 \setminus \overline{D}$ и непр в $E^2 \setminus D$

$\measuredangle$ D_{LA} огр L изн, L_A снар. $u, w: \in C(\overline{D}_{LA}), \in C^2(D_{LA})$, 18 уд ур Лапл. На L: $0=u\le w=M\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{\quad}}{a}\right)}{\ln(A/a)}$

на L_A: $u\le M=w$. Тк на гран D_{LA} $u\le w$, то

$$u\le w=M\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{\quad}}{a}\right)}{\ln(A/a)}$$ (по лемме, аналог из 16)

$$\Rightarrow 0<\varepsilon=u(x^*,y^*)\le w(x^*,y^*)=M\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{(x^*-x_0)^2+\ldots}}{a}\right)}{\ln(A/a)}\Rightarrow$$

$w(x^*,y^*)\to 0$ при $A\to\infty$ – противор пред нер-ву ■

Пример не ед без усл на беск.

$D: x^2+y^2<1$, $L: x^2+y^2=1$

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{в } E^2\backslash\overline{D}\\ u(x,y)=1 & \text{на } L\end{cases}\qquad u_1=1,\quad u_2=1+\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(19) Ф-ция Грина для внутр зад. Опр. Теор о полож.

Опр: Ф-ция $G(M,P)$, $M,P\in\Omega$ наз ф-цией Грина внутр з. Дирихле для ур Лапл, если:

1) $G(M,P)=\frac{1}{4\pi R_{MP}}+v(M,P)$ $\forall P\neq M$, где $v(M,P)$ ⊖

2) $G(M,P)=0$, $P\in\Sigma$, $\forall M\in\Omega$

⊖ $v(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ гармон в Ω по P $\forall M\in\Omega$, $v(M,P)\in C^1(\overline{\Omega})$ $\forall M\in\Omega$

Теор 1 (о полож): ф. Гр. $G(M,P)>0$ $\forall M,P\in\Omega$, $M\neq P$

Док-во: Пусть $M_0\in\Omega$. Рассм сферу $\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}$, где ε: $\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}\in\Omega$. Пусть Ω_ε – огр Σ снар, $\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}$ изнутр. $W(P)=G(M_0,P)$ непр в $\overline{\Omega_\varepsilon}$ и гармон в Ω_ε (т.к особ. только в $P=M$, т.к v-гарм.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по принц. макс зн: $\min\limits_{\overline{\Omega_\varepsilon}} G(M_0,P)=\min\limits_{\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}\cup\Sigma} G(\ldots)$

$G(M_0,P)=0$, $P\in\Sigma$

$G(M_0,P)=\frac{1}{4\pi R_{M_0P}}+v(M_0,P)>0$, $P\in\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}$ $\Rightarrow G(\ldots)\geq 0$, $P\in\overline{\Omega_\varepsilon}$

Пусть $\exists P_1\in\Omega_\varepsilon$: $G(M_0,P_1)=0$, но тогда $G(M_0,P)=0$ – противор. полож на $\Sigma_{M_0}^{\varepsilon}$ $\Rightarrow G(M_0,P)>0$ на Ω_ε. Т.к ε – сколь угод. мало, то $G(M_0,P)>0$ $\forall P\in\Omega$, $P\neq M_0$ ■

Теор 2: $\forall M,P\in\Omega$: $G(M,P)=G(P,M)$

Док-во: Пусть $M_1,M_2\in\Omega$. Надо: $G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$

Рассм $\Sigma_{M_1}^{\varepsilon}$ и $\Sigma_{M_2}^{\varepsilon}$. Пусть они $\in\Omega$ и не пересек. Ω_ε – огр Σ снар, $\Sigma_{M_1}^{\varepsilon}$ $\Sigma_{M_2}^{\varepsilon}$ изнут. $\underbrace{G(M_1,P)}_{=G_1}$, $\underbrace{G(M_2,P)}_{=G_2}\in C^1(\overline{\Omega_\varepsilon})$, и гармон в Ω_ε. 2 ф. Грина:

$$\iiint_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)\,d\tau=\iint_\Sigma \Big(\underbrace{u\frac{\partial v}{\partial n}}_{(*)}-\underbrace{v\frac{\partial u}{\partial n}}_{(**)}\Big)d\sigma$$

Для Ω_ε и G_1,G_2:

$$\iiint_{\Omega_\varepsilon}(G_1\Delta G_2-G_2\Delta G_1)\,d\tau_P=\iint_\Sigma \ldots d\sigma_P+\underbrace{\iint_{\Sigma_{M_1}^{\varepsilon}}\ldots d\sigma_P}_{(1)}+\underbrace{\iint_{\Sigma_{M_2}^{\varepsilon}}\ldots d\sigma_P}_{(2)}$$

Т.к G_1,G_2 гармон, то $(1)+(2)=0$

$(*\text{ в }1)\leq\left\{\begin{matrix}G_1\leq\frac{C_1}{\varepsilon}=\text{const}\\ (G_2)'_{n_P}\text{ – непр}\end{matrix}\right\}\leq\iint_{\Sigma_{M_1}^{\varepsilon}}\frac{C_2}{\varepsilon}d\sigma=4\pi C_2\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$

$(**\text{ в }1)$: $(G_1)'_{n_P}=\frac{\partial}{\partial n_P}\Big(\frac{1}{4\pi R_{M_1P}}+\underbrace{v(M_1,P)}_{\text{огр на }\Sigma_{M_1}^{\varepsilon}\text{ при }\varepsilon\to 0}\Big)$

если $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $P(\xi,\eta,\zeta)$, то $n_P=\left\{\frac{x_1-\xi}{R_{M_1P}},\ldots\right\}$

19 $\operatorname{grad}\frac{1}{R_{M_1 P}} = \{-\frac{\xi - x_1}{R^3}, \dots\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{4\pi R}\right) = \frac{1}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2},\ P \in \Sigma_{M_1}^{\varepsilon}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\cancel{**}\ 6\ 1) = G(M_2, M_1) \Rightarrow (1) = -G(M_2, M_1)$

Аналогично $(2) = G(M_1, M_2)$

$\Rightarrow G(M_1, M_2) - G(M_2, M_1) = 0$ $\blacksquare$

20) Потенц. прост и двойн слоя. Потенц. двой слоя с ед плот

E^2	E^3
Опр: прост. слой: $v(M)=\int_L g(P)\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\,dl_P$ $g(P)$ — плотн потенц. пр. слоя	прост. слой: $v(M)=\iint_\Sigma g(P)\frac{1}{R_{MP}}\,d\sigma_P$
двойн. слой: $u(M)=-\int_L f(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MP}}\right)dl_P$ $f(P)$ — плотн. потенц. двойн слоя	двойн слой: $u(M)=-\iint_\Sigma f(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P$

Двойн слой:

$$u(M)=-\int_L\dots dl_P=\int_L f(P)\underbrace{\frac{\partial}{\partial n_P}(\ln\rho_{MP})}_{(\text{grad}\ln\rho_{MP},\ n_P)}dl_P$$

Т.к. $\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\rho_{MP}=\frac{(\xi-x)}{\rho^2},\dots$, то

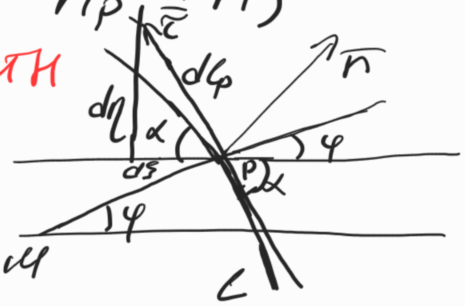
$\text{grad}\ln\rho_{MP}=\left\{\frac{(\xi-x)}{\rho^2},\dots\right\}$. $\measuredangle\ \overline{MP}=\{(\xi-x)\dots\}$. $\text{grad}\dots=\frac{\overline{MP}}{\rho^2}$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial n_P}(\ln\rho_{MP})=\text{grad}(\ln\rho,n_P)=\frac{(\overline{MP},n_P)}{\rho^2}=\frac{\cos\angle(\overline{MP},n_P)}{\rho_{MP}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(M)=\int_L f(P)\frac{\cos}{\rho}dl_P\quad(\text{потом } n_P\to n)$$

Потенц. двойн сл с един. плотн

$\exists f(P)=1$, $u_1(M)=\int_L\frac{\cos\angle MPn}{\rho_{MP}}dl_P$



$$\cos\angle MPn\,dl_P=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi-\alpha\right)dl_P=$$
$$=\sin(\varphi+\alpha)dl_P=\sin\varphi\cos\alpha\,dl_P+\cos\varphi\sin\alpha\,dl_P=\{\ \}\ \circleddash$$

$$\left.\begin{array}{ll} P(\xi,\eta) & r(\varphi) \\ \xi=r(\varphi)\sin\varphi & d\xi=-dl_P\cos\alpha \\ \eta=r(\varphi)\cos\varphi & d\eta=dl_P\sin\alpha \end{array}\right)$$

$$\circleddash\ -\sin\varphi\,d\xi+\cos\varphi\,d\eta=-\sin\varphi\,(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)d\varphi+$$
$$+\cos\varphi(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)d\varphi=r(\varphi)(\sin^2+\cos^2)d\varphi=r\,d\varphi$$

$$u_1(M)=\int_L\frac{\cos}{\rho}dl_P=\int_0^{2\pi}\frac{r(\varphi)d\varphi}{r(\varphi)}=\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi,\ M\in D$$

$$u_1(M)=\begin{cases}2\pi & M\in D\\ \pi & M\in L\\ 0 & M\in E^2\setminus\overline{D}\end{cases}$$

(21) Теор о скачке потенц. двойн сл. Свед. внутр з. Дир к интегр. ур-ю Фредгольма 2-го рода

Опр: т. $M(x,y)$, $P(\xi,\eta)$ $F(M,P)$ опр непр $\forall M \neq P$.
$I(M) = \int_L F(M,P)\,dl_p$ наз равн сх в $P^* \in L$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ окр т. P^*: $V(P^*)$ и дуга $l \in L$: $l \in V(P^*)$ и $\forall M \in V(P^*)$ имет $\left|\int_l F(M,P^*)\,dl_p\right| < \varepsilon$

Теор 1: Если $I(M)$ равн сх в $P^* \in L$, то $I(M)$ непр в т P^*

Теор 2 (равн. непр): $\measuredangle$ $v(M) = u(M) - f(P^*)\,u_c(M)$. Если $f(p)$ — непр в P^*, то $u(M)$ непр в P^*

Док-во: $f(P)$ — непр $\Rightarrow$ $\exists$ дуга l: $\forall P \in l$ $|f(p) - f(P^*)| < \varepsilon/2\pi$
$v(M) = \int_L [f(P) - f(P^*)] \frac{\cos \angle MP\bar{n}}{\rho}\,dl_p$ (доказ $< \varepsilon$) ?

$$\left|\int_L [f(P) - f(P^*)] \frac{\cos \angle MP\bar{n}}{\rho}\,dl_p\right| = \left|\int [f(r(\varphi)) - f(r(\varphi^*))] \ldots\right| \leq \varepsilon$$

Теор 3 (о скачке потенц): $\exists$ пределы $u(M)$:
$\lim\limits_{M \to P^*_{вн}} u(M) = \pi f(P^*) + u(P^*)$, $\lim\limits_{M \to P^*_{н}} u(M) = -\pi f(P^*) + u(P^*)$
изнутри ($P^*_{вн}$), снаружи ($P^*_{н}$)

Док-во: $v(M) = u(M) - f(P^*)\,u_c(M)$ непр, то
$$\lim_{M \to P^*_{вн}} u(M) = \lim\left(u(M) - f(P^*)\,u_c(M) + f(P^*)\,u_c(M)\right) =$$
$$= u(P^*) - f(P^*)\underbrace{u_c(P^*)}_{=\pi} + f(P^*)\cdot 2\pi = \pi f(P^*) + u(P^*)$$
$$\lim_{M \to P^*_{н}} u(M) = \lim(-\,''\,-) = u(P^*) - f(P^*)\cdot\pi + f(P^*)\cdot 0 =$$
$$= -\pi f(P^*) + u(P^*)$$

Сведение вн. з. Дир к инт. ур Фредгольма 2-го р.

$$\lim_{M \to P^*_{вн}} u(M) = \pi f(P^*) + u(P^*)$$

Вн з. Дир: Найти $u(x,y)$: $\in C(\bar{D})$, $\in C^2(D)$, явл реш. ур Лапл: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ в D и $u(x,y) = f(x,y)$ в L

$\measuredangle$ потенц. дв сл: $u(M) = \int_L f(P) \frac{\cos \angle MP\bar{n}}{\rho_{MP}}\,dl_p$

21 опр. реш вну: $u(x,y)=u(M)=\begin{cases} \int_L f(P)\frac{\cos}{\rho}\,dl_P & M\in D \\ \pi f(M)+\int \ldots & M\in L \end{cases}$

эта ф-ция уд. всему (тк. потенц. явл гарм вне конт)

$\Rightarrow$ нужно вып. краев. усл.: $u(x,y)=g(x,y)$ или

$u(M)=\pi f(M)+\int_L f(P)\frac{\cos\angle \overline{MP}\,\overline{n}}{\rho_{MP}}dl_P=g(M)$ надо: $f(M)$

ур-е Фредг: $\pi f(M)+\int_L f(P)\frac{\cos\angle \overline{MP}\,\overline{n}}{\rho_{MP}}dl_P=g(M)$, $M\in L$

(22) ∃ реш вн. з. Дирихле

$$\lim_{M\to P^*_{вн}} u(M) = \pi f(P^*) + u(P^*)$$

З. Дирихле: Найти $u(x,y)$: $\in C(\bar{D})$, $\in C^2(D)$, $\Delta u = 0$ в D, $u(x,y) = g(x,y)$ на L

$$u(x,y) = \begin{cases} \int_L f(P)\dfrac{\cos\angle \overline{MPn}}{\rho_{MP}}\,dl_P & M\in D \\ \pi f(M) + \int_L \ldots & M \in L \end{cases} \Rightarrow \text{найти } f(M):$$

$\pi f(M) + \int \ldots = g(M)$, $M\in L$ (1) – инт ур-е Фред. 2-го рода

Теор Фредгольма: Если однород ур-е (1) ($g(M)=0$) имеет в классе непр ф-ций $f(M)$ только нул. реш, то (1) имеет един. непр реш. $\forall g(M)$ непр на L

Теор(сущ): Если $g(M)$ непр на L, то реш. з. Дир существ

Док-во Дост доказ, что (1) имеет непр реш $\Leftarrow$ однород (1) имеет только нул. реш

От против: $\exists\, f(M) \neq 0$ – непр, явл реш. однор (1).
Тогда $\exists\, M^*\in L$: $f(M^*) = \max_L f(M) = \max|f(M)| > 0$

Подст. M^*: $\pi f(M^*) = \int_L f(P)\dfrac{\cos\angle \overline{M^*Pn}}{\rho_{M^*P}}\,dl_P = 0$

Исп зн потенц с дв пл.:

$$\pi f(M^*) = \int_L f(M^*) \ldots \Rightarrow \int_L f(M^*)\ldots + \int_L f(P) = \int_L (f(M^*) + f(P))\ldots = 0$$

Тк. в M^* $f(M)$ достиг max по $||$, то $f(M^*) + f(P) \geq 0$, при $P = M^*$: $2f(M^*) > 0$

Тк $\dfrac{\cos\angle \overline{M^*Pn}}{\rho_{M^*P}}\,dl_P = d\varphi$, тк конт строго выпукл, то $\Rightarrow$ $\dfrac{\cos}{\rho} = \dfrac{d\varphi}{dl_P} > 0$

$$\Rightarrow \int_L [f(M^*) + f(M^*)]\cdot\frac{\cos}{\rho}\,dl_P > 0 \text{ – противор, тк } = 0$$

23) Ур-е колеб. Постан осн. задач

$\forall$ для $u(x,t)$ $\quad u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$ – колеб струны

Типы гран. усл:

1) $u(0,t)=\mu(t)$
2) $u_x(0,t)=\nu(t)$ $\quad 0\le t\le T$ $\quad$ для $u(l,t)$ – аналогично
3) $u(0,t)+\lambda_x u(0,t)=\Theta(t)$

Первая кр. зад:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) & 0<x<l,\ 0<t\le T \\ u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t) & 0\le t\le T \\ u(x,0)=\varphi(x)\quad u_t(x,0)=\psi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$$

Вторая кр. зад:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) & 0<x<l,\ 0<t\le T \\ u_x(0,t)=\nu_1(t),\quad u_x(l,t)=\nu_2(t) & 0\le t\le T \\ u(x,0)=\varphi(x)\quad u_t(x,0)=\psi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$$

1-я кр. зад на полупр:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) & 0<x<l,\ 0<t\le T \\ u(0,t)=\mu(t) & 0\le t\le T \\ u(x,0)=\varphi(x)\quad u_t(x,0)=\psi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$$

2-я кр. зад. на полупр.:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) & 0<x<l,\ 0<t\le T \\ u_x(0,t)=\nu(t), & 0\le t\le T \\ u(x,0)=\varphi(x)\quad u_t(x,0)=\psi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x) & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

24 Ф. Даламбера. Сущ, ед и уст реш ЗК для ур колеб

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (1) \\ u(x,0) = \varphi(x) & (2) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & (3) \end{cases}$$ $-\infty < x < +\infty,\ t > 0$ Найти $u(x,t)$

Найдем реш сущ предп, что $\exists$: Ј $\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$ $x = \frac{\xi+\eta}{2}$, $t = \frac{\xi-\eta}{2a}$

$$\measuredangle\ V(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2a}\right)$$

$$V_\xi = u_x \cdot \frac{1}{2} + u_t \cdot \frac{1}{2a} \qquad V_{\xi\eta} = u_{xx} \cdot \frac{1}{4} - u_{xt} \cdot \frac{1}{4a} + u_{tx} \cdot \frac{1}{4} - u_{tt} \frac{1}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow V_\xi(\xi,\eta) = f(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(\xi,\eta) = \int f(\xi) d\xi + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \Rightarrow u = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \quad (*)$$

$$u_t(x,0) = -a f_1'(x) + a f_2'(x) = \psi(x)$$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} \psi(s) ds + c \quad (**)$$

$$\Rightarrow (*) + (**) \Rightarrow 2 f_2(x) = \varphi(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} \psi(s) ds + c$$

$$\Rightarrow (*) - (**) \Rightarrow 2 f_1(x) = \ldots$$

$$f_2 = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \psi(s) ds + c/2 \qquad f_1 = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \psi(s) ds - c/2$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(s) ds + c/2 - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x-at} \psi(s) ds - c/2 =$$

$$= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \quad (4) - \text{ф. Даламб.}$$

Теор (о сущ и единств): $\exists\ \varphi \in C^2(E),\ \psi \in C^1(E)$. Тогда $\exists!$ ф-ция $u(x,t)$: $u \in C^2(E \times \overline{E^+})$ и $u(x,t)$ удовл (1)-(3)

Док-во: Определим $u(x,t)$ по (4). Тогда $u \in C(E \times \overline{E^+})$

Диф (4) дважды по x и дважды по t, получ, что (4) удовл (1). Вып нач. усл след из (4).

Единств следует из вывода ф. Даламбера. ■

Теор (об устойч. реш): $\exists\ \varphi_i \in C^2(E),\ \psi_i \in C^1(E)$, $i = 1, 2$ и $|\varphi_i(x)| \le M$, $|\psi_i(x)| \le M$ для $x \in E$. Тогда, если $u_i(x,t)$ — реш ЗК то

$$\sup_{\Pi_T} |u_1 - u_2| \le \sup_E |\varphi_1 - \varphi_2| + T \sup |\psi_1 - \psi_2|,$$ где $\Pi_T = \{(x,t) : x \in E,\ t \in [0,T]\}$

24 Док-во: Из ф. Даламбера: для $(x,t)\in П_T$

$$|u_1-u_2| \leqslant \left| \frac{\varphi_1(x+at)-\varphi(x+at)}{2} \right| \cdot 2 + 2\cdot\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(s)-\psi_2(s)|\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{П_T}|u_1-u_2| \leqslant \sup_E|\varphi_1-\varphi_2| + T\sup_E|\psi_1-\psi_2|$$

■

25) Метод разд. перемен для док-ва сущ. реш 1-й кр задачи для ур-я колебаний

1-я кр задача:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (1) \quad 0<x<l,\ 0<t\le T \\ u(0,t)=0 \quad u(l,t)=0 & (2),(3) \quad 0\le t\le T \\ u(x,0)=\varphi(x) \quad u_t(x,0)=\psi(x) & (4),(5) \quad 0\le x\le l \end{cases} \qquad \Pi=\{(x,t): \begin{matrix}0\le x\le l\\ 0\le t\le T\end{matrix}\}$$

Теор (существ): $\exists\ \varphi(x)\in C^3[0,l]$, $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, $\psi(x)\in C^2[0,l]$, $\psi(0)=\psi(l)=0$. Тогда $\exists\ u\in C(\Pi^2)$ и уд (1)-(5)

Док-во: $\exists\ \tilde{u}(x,t)=X(x)T(t)$

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda=const$$

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad n\in\mathbb{N}$

$X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x$

$T''+a^2\lambda T=0$

$T_n(t)=\tilde{b}_n\cos\frac{\pi n}{l}at+\tilde{c}_n\sin\frac{\pi n}{l}at$

$$\tilde{u}_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left(b_n\cos\frac{\pi n}{l}at+c_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$u(x,t)=\sum\tilde{u}_n(x,t) \qquad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds$$

$$u(x,0)=\sum b_n\sin\frac{\pi n}{l}x=\varphi(x)\Rightarrow b_n=\varphi_n$$

$$u_t(x,t)=\sum\left(b_n\left(-\frac{\pi n}{l}a\right)\sin\frac{\pi n}{l}at+c_n\frac{\pi n}{l}a\cos\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$u_t(x,0)=\sum c_n\frac{\pi n}{l}a\sin\frac{\pi n}{l}x=\psi(x)\Rightarrow c_n=\ldots=\frac{l}{\pi na}\psi_n$$

$$u(x,t)=\sum\left(\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}at+\frac{l}{\pi na}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \quad (*)$$

Доказ $\exists$ 2-х производ:

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds=\frac{2}{l}\varphi(s)\left(-\frac{l}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n}{l}s\Big|_0^l\overset{=0}{}+\frac{2}{\pi n}\int_0^l\varphi'(s)\cos\frac{\pi n}{l}s\,ds=$$

$$=2/\pi n\cdot\varphi'(s)(l/\pi n)\sin\frac{\pi n}{l}s\Big|_0^l\overset{=0}{}-\frac{2l}{\pi n}\int_0^l\varphi''\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds=$$

$$=-2l/(\pi n)^2\varphi''(s)(-l/\pi n)\cos\frac{\pi n}{l}s\Big|_0^l\overset{=0}{}-2l/(\pi n)^3\int_0^l\varphi'''\cos\frac{\pi n}{l}s\,ds\Rightarrow$$

25 $\Rightarrow \varphi_n = -\frac{2l}{(\pi n)^3}\int_0^l \varphi''' \cos\frac{\pi n}{l} s\,ds$ $\psi_n = -\frac{2l}{(\pi n)^2}\int_0^l \psi'' \sin\frac{\pi n}{l} s\,ds$

Для $f(x)\in C[0,l]$ $f_n = \int_0^l f(s)\sin\frac{\pi n}{l}s\,ds$ $\hat{f}_n = \int_0^l f(s)\cos\frac{\pi n}{l}s\,ds$

$\sum f_n^2 < \infty$, $\sum \hat{f}_n^2 < \infty$, $|\varphi_n| \leq C_1/n^3$, $|\psi_n| < C_2/n^2 \Rightarrow$

$u(x,t) = \sum \tilde{u}_n(x,t)$, $|\tilde{u}_n| \leq C_1/n^3 + l/\pi a \cdot C_2/n^2 = C_3/n^3$ б П

$\Rightarrow$ сущ. и непр доказ. надо доказ диф.

$$u_x(x,t) = \sum\left(\varphi_n \cos\frac{\pi n}{l}at + \frac{l}{\pi n a}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\frac{\pi n}{l}\cos\frac{\pi n}{l}x$$

$$\left|\frac{\partial\tilde{u}_n}{\partial x}(x,t)\right| \leq \left(\frac{C_1}{n^3} + \frac{l}{\pi n a}\frac{C_2}{n^2}\right)\frac{\pi n}{l} \leq \frac{C_4}{n^2} \text{ б П}$$

$$u_{xx} = \sum\left(\varphi_n \cos\frac{\pi n}{l}at + \frac{l}{\pi n a}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$\left|\frac{\partial^2\tilde{u}_n}{\partial x^2}\right| \leq \left(|\varphi_n| + \frac{l}{\pi n a}|\psi_n|\right)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \leq C_5\left(|\varphi_n| n^2 + |\psi_n| n\right) \leq$$

$$\leq C_6\left(\frac{1}{n^3}|\varphi_n'''| n^2 + \frac{1}{n^2}|\psi_n''| n\right) \leq C_6\left(\frac{|\varphi_n'''|}{n} + \frac{|\psi_n''|}{n}\right) \leq C_7\left(\frac{1\cdot 2}{2n^2} + \frac{|\varphi_n'''|^2 + |\psi_n''|^2}{2}\right)$$

по принц. Вейерштр. доказ, что $\exists$ и сх 2-е произв

$$u(x,0) = \sum \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x)$$
$$u_t(x,0) = \sum \frac{l}{\pi n a}\psi_n \frac{\pi n a}{l}\sin\frac{\pi n}{l}x = \psi(x)$$

(26) Теор о единств реш 1-й кр. зад. для ур-я колебаний

Теор (о ед): Пусть $u_i(x,t)$ $i=1,2$: $\in C^2(\overline{\Pi})$, $(u_i)_{tt}=a^2(u_i)_{xx}+f(x,t)$ в $\overline{\Pi}$

$$\begin{cases} u_i(0,t)=\mu_1(t),\ u_i(l,t)=\mu_2(t) & 0\le t\le T \\ u_i(x,0)=\varphi(x),\ (u_i)_t(x,0)=\psi(x) & 0\le x\le l \end{cases}$$

то $u_1=u_2$ в $\overline{\Pi}$

Док-во: Пусть $v=u_1-u_2$. Очев, что $v\in C^2(\overline{\Pi})$ и явл реш.:

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx} & \text{в } \overline{\Pi} & (1) \\ v(0,t)=v(l,t)=0 & 0\le t\le T & (2)(3) \\ v(x,0)=v_t(x,0)=0 & 0\le x\le l & (4)(5) \end{cases}$$

Надо: $v(x,t)=0$

Рассм $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l[a^2v_x^2+v_t^2]dx$. $\frac{\partial E}{\partial t}(t)=\int_0^l[a^2v_xv_{xt}+v_tv_{tt}]dx$

$=a^2v_xv_t\Big|_0^l+\int_0^l[-a^2v_{xx}v_t+v_tv_{tt}]dx=a^2v_x(l,t)\overbrace{v_t(l,t)}^{=0}-$

$-a^2v_x(0,t)\overbrace{v_t(0,t)}^{=0}+\int_0^l v_t\overbrace{[v_{tt}-a^2v_{xx}]}^{=0}dx=0$

$E(t)=\text{const}$, $t\in[0,T]$ $\Rightarrow \frac{dE}{dt}=0$

$E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l[a^2(v_x(x,0))^2+\overbrace{(v_t(x,0))^2}^{=0}]dx$ $E(t)=0$ $t\in[0,T]$

$v_x(x,t)=v_t(x,t)=0\Rightarrow v(x,t)=\text{const}\Rightarrow v(x,t)=0$ в Π ■

27) Задача с данными на характер. Эквив сист инт ур.

$$\begin{cases} u_{xy} = a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + f(x,y,u(x,y)) & (1) \quad (x,y)\in\overline{\Pi} \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad 0\le x\le l_1 & (2) \\ u(0,y) = \psi(y) \quad 0\le y\le l_2 & (3) \end{cases} \qquad \overline{\Pi} = \{(x,y): 0\le x\le l_1,\ 0\le y\le l_2\}$$

задача с данными на характеристиках

Усл: $a(x,y)\in C(\overline{\Pi})$, $b(x,y)\in C(\overline{\Pi})$. $f(x,y,p)\in C(\overline{\Pi}\times E)$, уд. усл. Липш по p: $|f(x,y,p_1) - f(x,y,p_2)| \le L|p_1 - p_2|$ $\forall (x,y)\in\overline{\Pi}$, $\forall p_1,p_2\in E$
$\varphi(x)\in C^1[0,l_1]$, $\psi(y)\in C^1[0,l_2]$ и $\varphi(0)=\psi(0)$

Опр: $u(x)$: u, u_x, u_y, u_{xy} — непр в $\overline{\Pi}$ и уд (1)-(3) наз реш.

Эквивал система: $\exists u(x,t)$ — реш (1)-(3). Проинт (1) по y

$$u_x(x,y) - u_x(x,0) = \int_0^y [a(x,\eta)\,u_x(x,\eta) + b(x,\eta)\,u_y(x,\eta) + f(\ldots)]\,d\eta$$

а затем по x:

$$u(x,y) - u(0,y) - u(x,0) + u(0,0) = \int_0^x\int_0^y [a(\xi,\eta)\,u_x(\xi,\eta) + b(\ldots)\,u_y(\ldots) + f(\ldots)]\,d\eta\,d\xi$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \Phi(x,y) + \int_0^x\int_0^y [a(\xi,\eta)\,v_x(\ldots) + b(\ldots)\,v_y(\ldots) + f(\ldots)]\,d\eta\,d\xi$$

где $\Phi(x,y) = \psi(y) + \varphi(x) - \varphi(0)$

Введем $v = u_x(x,y)$, $w = u_y(x,y)$

$$u(x,y) = \Phi(x,y) + \int_0^x\int_0^y [a(\xi,\eta)\,v(\ldots) + b(\ldots)\,w(\ldots) + f(\ldots)]\,d\xi\,d\eta \quad (4)$$

$$v(x,y) = \Phi_x(x,y) + \int_0^y [a(x,\eta)\,v(\ldots) + b(\ldots)\,w(\ldots) + f(\ldots)]\,d\eta \quad (5)$$

$$w(x,y) = \Phi_y(x,y) + \int_0^x [a(\xi,y)\,v(\ldots) + b(\ldots)\,w(\ldots) + f(\ldots)]\,d\xi \quad (6)$$

Если $u(x,y)$ — реш $\Rightarrow$ $u(x,y)$, $v(\ldots)$, $w(\ldots)$ — реш сист (4)-(6).
Обр. тоже верно: $\exists u, v, w\in C[\overline{\Pi}]$ и уд (4)-(6). Тогда $u(x,y)$ — реш (1)-(3)

(28) Сущ. реш задачи с дан. на характер

$$\begin{cases} u_{xy} = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + f(x,y,u(x,y)) & (1) \quad (x,y)\in \overline{\Pi} \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad 0\le x\le l_1 & (2) \\ u(0,y) = \psi(y) \quad 0\le y\le l_2 & (3) \end{cases} \qquad \overline{\Pi} = \{(x,y): 0\le x\le l_1,\ 0\le y\le l_2\}$$

$$u(x,y) = \Phi(x,y) + \int_0^x\int_0^y [a(\xi,\eta)v(..) + b(..)w(..) + f(..)]\,d\xi\,d\eta \quad (4)$$

$$v(x,y) = \Phi_x(x,y) + \int_0^y [a(x,\eta)v(..) + b(..)w(..) + f(..)]\,d\eta \quad (5)$$

$$w(x,y) = \Phi_y(x,y) + \int_0^x [a(\xi,y)v(..) + b(..)w(..) + f(..)]\,d\xi \quad (6)$$

Теор (сущ) $a(x,y)\in C(\overline{\Pi})$, $b(x,y)\in C(\overline{\Pi})$. $f(x,y,p)\in C(\overline{\Pi}\times E)$, уд. усл. Липш по p: $|f(x,y,p_1) - f(x,y,p_2)| \le L|p_1 - p_2|$ $\forall (x,y)\in\overline{\Pi}$ $\forall p_1,p_2\in E$, $\varphi(x)\in C^1[0,l_1]$, $\psi(y)\in C^1[0,l_2]$ и $\varphi(0)=\psi(0)$.

Тогда $\exists u(x,t)$ — реш (1–3)

Док-во: Докаж, что $\exists u, v, w$ непр в Π и уд (4)–(6).

Д $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$. $\exists u_0(x,y) = v_0(..) = w_0(..) = 0$

$$u_n(x,y) = \Phi(..) + \int_0^x\int_0^y [a(\xi,\eta)v_{n-1}(..) + b(..)w_{n-1}(..) + f(\xi,\eta,u_{n-1}(\xi,\eta))]\,d\eta\,d\xi \quad (7)$$

$$v_n(x,y) = \Phi_x(..) + \int_0^y [a(x,\eta)v_{n-1}(..) + b(..)w_{n-1}(..) + f(..)]\,d\eta \quad (8)$$

$$w_n(x,y) = \Phi_y(x,y) + \int_0^x [a(\xi,y)v_{n-1}(..) + b(..)w_{n-1}(..) + f(..)]\,d\xi \quad (9)$$

Надо показ, что все 3 сход равн при $n\to\infty$

введём: $M = \max\{\max a(x,y), \max b(..), L\}$ $\quad K = 2 + l_1 + l_2$

$H = \max\{\max|u_1(x,y)|, \max|v_1(..)|, \max|w_1(..)|\}$

$|u_1 - u_0|\le H$, $|v_1 - v_0|\le H$, $|w_1 - w_0|\le H$. Тогда:

$$|u_2 - u_1| \le \int_0^x\int_0^y [|a(\xi,\eta)|\cdot|v_1(..) - v_0()| + |b()|\cdot|w_1() - w_0()| + L|u_1() - u_0()|]\,d\eta\,d\xi \le \int_0^x\int_0^y [MH + MH + MH]\,d\eta\,d\xi = 3HMxy \le 3HM\frac{(x+y)^2}{2!}$$

$$|u_2 - u_1| \le 3HM\frac{(x+y)^2}{2!}$$

$$|v_2 - v_1| \le \int_0^y [M|v_1 - v_0| + M|w_1 - w_0| + M|u_1 - u_0|]\,d\eta \le 3MHy \le 3MH(x+y)$$

$|w_2 - w_1| \le 3MH(x+y)/1!$ — аналогично

28

База инд: $|u_n-u_{n-1}|\le 3MH^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^n}{n!}$, $|v_n-v_{n-1}|\le 3HM^{n-1}K^{n-2}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}$

$|w_n-w_{n-1}|\le$ — " — $n=2$ – верно

$$|u_{n+1}-u_n|\le\int_0^x\int_0^y\left[M|v_n-v_{n-1}|+M|w_n-w_{n-1}|+M|u_n-u_{n-1}|\right]d\eta\, d\xi\le$$

$$\le 3HM^nK^{n-2}\int_0^x\int_0^y\left[2\frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(\xi+\eta)^n}{n!}\right]d\eta\, d\xi\le 3HM^nK^{n-2}\left[2\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}\right]\le$$

что надо

$$|v_{n+1}-v_n|\le\int_0^y\left[M|v_n-v_{n-1}|+M|w_n-w_{n-1}|+M|u_n-u_{n-1}|\right]d\eta\le$$

$$\le M\int_0^y 3HM^{n-1}K^{n-2}\left[2\frac{(x+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(x+\eta)^n}{n!}\right]d\eta\le 3HM^nK^{n-2}\int_0^y[2\ldots]d\eta\le 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

Для w_n – аналогично

$\Rightarrow u_n\rightrightarrows\bar u$, $v_n\rightrightarrows\bar v$, $w_n\rightrightarrows\bar w$, $u_n=\sum_{m=1}^n(u_m-u_{m-1})$

Сходим этой послед эквив: $|u_m-u_{m-1}|\le 3HM^mK^{m-2}\frac{(l_1+l_2)^m}{m!}$

$\Rightarrow \bar u,\bar v,\bar w$ непр и явл реш. сист инт ур-ий $\Rightarrow$ реш сист с дан. на характ (т.к эквив)

(29) Ед. реш зад. с дан. на характ

$$\begin{cases} u_{xy} = a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + f(x,y,u(x,y)) & (1) \quad (x,y)\in\overline{\Pi} \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad 0\le x\le l_1 & (2) \\ u(0,y) = \psi(y) \quad 0\le y\le l_2 & (3) \end{cases}$$

$\overline{\Pi} = \{(x,y): 0\le x\le l_1,\ 0\le y\le l_2\}$

задача с данными на характеристиках

Усл: $a(x,y)\in C(\overline{\Pi})$, $b(x,y)\in C(\overline{\Pi})$. $f(x,y,p)\in C(\overline{\Pi}\times E)$, уд. усл. Липш по p: $|f(x,y,p_1) - f(x,y,p_2)| \le L|p_1-p_2|\ \forall (x,y)\in\overline{\Pi},\ \forall p_1,p_2\in E$

$\varphi(x)\in C^1[0,l_1]$, $\psi(y)\in C^1[0,l_2]$ и $\varphi(0)=\psi(0)$

Теор: $\exists$ вып усл. Тогда если $u_i(x,y)$ $i=1,2$ – реш (1–3), то $u_1=u_2$

Док-во:

$$u(x,y) = \Phi(x,y) + \int_0^x\int_0^y [a(\xi,\eta)\,v(\ldots) + b(\ldots)\,w(\ldots) + f(\ldots)]\,d\xi\,d\eta \quad (4)$$

$$v(x,y) = \Phi_x(x,y) + \int_0^y [a(x,\eta)\,v(\ldots) + b(\ldots)\,w(\ldots) + f(\ldots)]\,d\eta \quad (5)$$

$$w(x,y) = \Phi_y(x,y) + \int_0^x [a(\xi,y)\,v(\ldots) + b(\ldots)\,w(\ldots) + f(\ldots)]\,d\xi \quad (6)$$

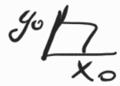
Тк u_i $i=1,2$ – реш (1)–(3), то $u_i(x,y)$, $v_i=(u_i)_x$, $w_i=(u_i)_y$ явл реш (4)–(6). Введем: $u=u_1-u_2$, $v=\ldots$, $w=\ldots$

$M=\max\{\max|a(x,y)|,\ \max|b(x,y)|,\ L\}$ и справедливо:

$$|u(x,y)| \le \int_0^x\int_0^y [M|v(\xi,\eta)| + M|w()| + M|u()|]\,d\eta\,d\xi$$

$$|v()| \le \int_0^y [M|v(x,\eta)| + M|w()| + M|u()|]\,d\eta$$

$$|w()| \le \int_0^x [M|v(\xi,y)| + M|w()| + M|u()|]\,d\xi$$

С пом этих нер-в докаж, что $u=v=w=0$ в $\overline{\Pi}$. $\exists x_0\in(0,l_1]$, $y_0\in(0,l_2]$: $3Mx_0y_0<1$, $3Mx_0<1$, $3My_0<1$. $\exists \Pi_{x_0y_0} =$ 

$\exists u_0=\max|u(x,y)|$, $v_0=\max|v()|$, $w_0=\max|w()|$ на $\Pi_{x_0y_0}$

$u_0 \le M(v_0+w_0+u_0)x_0y_0$

$v_0 \le M(v_0+w_0+u_0)x_0$ $\quad (u_0>0)$

$w_0 \le M(v_0+w_0+u_0)y_0$

$\Rightarrow u_0 \le \underbrace{3M_0x_0y_0}_{<1} u_0 \Rightarrow u_0 \not> 0 \Rightarrow =0$

Возб $x_1 \in (x_0,l_1)$: $3M(x_1-x_0)y_0<1, \ldots \Rightarrow$ аналог $\Rightarrow$ все $\Rightarrow u_1=u_2$

30 Сопряж. диф операторы

$\exists\, \Omega \subset E^n$ и $u(\bar{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$: $u(\bar{x}) \in C^2(\Omega)$. Опред диф. опер.:

$$L[u(\bar{x})] = \sum_i^n \sum_j^n a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial u^2}{\partial x_i x_j} + \sum_i^n b_i(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\bar{x}) u,$$ где

$a_{ij}(\bar{x}) \in C^2(\Omega)$, $b_i(\bar{x}) \in C^1(\Omega)$, $c(\bar{x}) \in C(\Omega)$, $a_{ij}(\bar{x}) = a_{ji}(\bar{x})$

Опр: Диф. оператор $M[v(\bar{x})]$, действ на $v(\bar{x}) \in C^2(\Omega)$ назыв сопряж к $L[u(\bar{x})]$, если:

$$M[v(\bar{x})] = \sum_i^n \sum_j^n \frac{\partial^2 (a_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i^n \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} + c(\bar{x}) v$$

Опер. наз самосопряж, если $L[u(\bar{x})] = M[v(\bar{x})]$ $\forall u(\bar{x}) \in C^2(\Omega)$

Пример 1: Опер Лапл: $L[u(\bar{x})] = \Delta u = \sum_i^n \frac{\partial u}{\partial x_i^2}$, $M[v(\bar{x})] = \sum_i^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$ – с/с

Прим 2: Опер: $L[u(x,y,z)] = k(\dots)\Delta u = k u_{xx} + k u_{yy} + k u_{zz}$ – не с/с т.к.:

$M[v(x,y,z)] = (kv)_{xx} + (kv)_{yy} + (kv)_{zz}$.

Покаж, что $\forall u(\bar{x}), v(\bar{x}) \in C^2(\Omega)$ справ: $vL[u] - uM[v] = \sum \frac{\partial p_i}{\partial x_i}$ (1), где:

$$p_i(\bar{x}) = \sum_j^n \left(v a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (a_{ij} v)}{\partial x_j} \right) + b_i u v \quad (2)$$

Док-во:

Докажем (1) проверкой. Диф (2):

$$\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \sum_i \sum_j \left(v a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial (a_{ij} v)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (a_{ij} v)}{\partial x_j} - u \frac{\partial^2 (a_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} \right) +$$

$$+ \sum_i \left(b_i v \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} \right) + cuv - cuv \quad (3)$$

Т.к $a_{ij}(\bar{x}) = a_{ji}(\bar{x})$, то меняя индексацию, имеем:

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial (a_{ij} v)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_i \sum_j \frac{\partial (a_{ji} v)}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_i \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (a_{ij} v)}{\partial x_j}$$

$\Rightarrow$ перепишем (3) как: $\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \sum_i \sum_j \left(v a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - u \frac{\partial^2 (a_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} \right) +$

$$+ \sum_i \left(b_i v \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial (a_{ij} v)}{\partial x_i} \right) + cuv - cuv = v\left[\sum_i \sum_j a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right] -$$

$$- u\left[\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 (a_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_i \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} + cv \right] = vL[u] - vM[u]$$

$\blacksquare$

31) Метод Римана

Даёт возможн получ ф для реш дост. общ. зад. для ур-я гипербол типа на основе вспом. зад с дан на хар

$\exists a(), b() \in C^1(E^2)$, $c(), F() \in C(E)$. $\measuredangle\ l: l=\{x, f(x)\}$, $f \in C^1(E), f'<0$

$\exists Q^+ = \{(x,y): x \in E, y \geq f\}$. $\exists u \in C^2(\Omega^+)$ и удовл ур-ю:

$L[u(x,y)] = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = F$ (1), а на l:

$u(x,f) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial n}(x,f) = \psi(x)$ (2), где $\varphi \in C^1(E)$, $\psi \in C(E)$

$\exists$ реш (1)-(2) сущ. Получим его. $\exists A(x_0, y_0) \in \Omega^+$, $y_0 > f(x_0)$

$\exists B(f^{-1}(y_0), y_0)$ и $C(x_0, f(x_0)) \in l$. $\exists \Pi = \{(x,y): f^{-1}(y_0) \leq x \leq x_0,\ f(x_0) \leq y \leq y_0\}$

$\measuredangle$ з. с дан на хар:

$$\left.\begin{aligned} &M[v] = v_{xy} - \frac{\partial}{\partial x}(av) - \frac{\partial}{\partial y}(bv) + cv = 0 \quad (3)\\ &v(x,y_0) = \exp\left\{\int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)d\xi\right\},\ f^{-1}(y_0) \leq x \leq x_0 \quad (4)\\ &v(x_0,y) = \exp\left\{\int_{y_0}^{y} a(x_0, \xi)d\xi\right\},\ f(x_0) \leq y \leq y_0 \quad (5) \end{aligned}\right\} \text{реш } \exists!$$

$\measuredangle$ криволин $\triangle D$, огр отрезк: AB, CA и частью l, соед BC (l_{BC}). граница — ∂D

$\measuredangle$ инт $\iint_D (vL[u] - uM[v])ds = \iint_D \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y}\right)ds$. Исп. ф. Грина:

$$\iint_D (vL[u] - uM[v])ds = \iint_D \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y}\right)ds = \int_{\partial D}(P_1 dy + P_2 dx)$$

$$\int_{l_{BC}} (P_1 dy - P_2 dx) + \int_C^A P_1 dy + \int_A^B P_2 dx \Rightarrow \iint_D (vL[u] - uM[v])ds =$$

$$= \int_{l_{BC}} (P_1 dy - P_2 dx) + \int_C^A \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}v(x_0,y_0)u_y - \tfrac{1}{2}uv_y}_{(*)} + auv\Big)dy +$$

$$+ \int_B^A \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}v(x,y_0)u_x - \tfrac{1}{2}uv_x}_{(**)} - buv\Big)dx$$

Тк $(*) = \frac{1}{2}(v(x_0,y)u)_y - u(x_0)v_y$, $(**) = \frac{1}{2}(v(x,y_0)u)_x - uv_x$, то

$$\iint_D (vL[u] - uM[v])ds = \int_{l_{BC}} (P_1 dy - P_2 dx) + \int_C^A \left(\tfrac{1}{2}(vu)_y - u[v_y - av]\right)dy +$$

$$+ \int_B^A \left(\tfrac{1}{2}(vu)_x - u[v_x - bv]\right)dx$$ Из (4)-(5) $\Rightarrow v_y - av = 0$, $v_x - bv = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_D (vL[u] - uM[v])ds = \int_{l_{BC}} (P_1 dy - P_2 dx) + \int_C^A \left(\tfrac{1}{2}(v(x_0,y)u)_y\right)dy +$$

$$+ \int_B^A \left(\tfrac{1}{2}(v(x,y_0)u)_x\right)dx = \int_{l_{BC}} (P_1 dy - P_2 dx) + \tfrac{1}{2}u(A)v(A) - \tfrac{1}{2}u(C)v(C) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}u(A)v(A) - \tfrac{1}{2}u(B)v(B).$$ Тк $L[u] = F(x,y)$, $M[v] = 0$, $v(A) = 1$, то:

31

$$u(x_0, y_0) = u(A) = \iint_D v(x,y) F(\ ) ds - \int_{BC} (p_1 dy - p_2 dx) + \frac{1}{2} u(C) v(C) + \frac{1}{2} u(B) v(B) \quad (6)$$

Здесь $u(x,y)$ - реш з. с дан на хар, изв, зн. $u(C), u(B)$ изв, а

$p_1(x,y) = \frac{1}{2}(v(x,y) u_y) - u v_y) + a u v$ $\quad p_2(\ ) = \frac{1}{2}(v u_x - u v_x) + b u v$ на BC изв, т.к заданы $u(x, f(x)) = \varphi(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial n}(\ ) = \psi(x)$

(6) - итоговая ф Метода Римана. Она позвол наход реш (1)-(2) с помощью реш вспомог зад с дан. на характ (3)-(6) ф-ции $v(x,y)$